Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

Numerik I

— Blatt 12 (Besprechung: 21.01.2020) —

Aufgabe 1 Es sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sin(u) + v \\ 1 + \frac{\sin(v)}{4} + u \end{pmatrix}.$$

a) Man untersuche die Kontraktionseigenschaft von ϕ jeweils bezüglich $||\cdot||_\infty$ und $||\cdot||_2$.

b) Man berechne den Fixpunkt $x_* \in \mathbb{R}^2$ von ϕ mittels der gewöhnlichen Fixpunktiteration, für den Startwert $x_0 = (0,0)^T$. Wie oft ist bei Verwendung der a priori-Fehlerabschätzung zu iterieren, bis

$$||x_n - x_*||_2 \le 10^{-2}$$

garantiert werden kann? Die entsprechende Frage stellt sich bei Anwendung der a posteriori-Fehlerabschätzung.

(2+2)

Aufgabe 2 Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 4 \\ 2x_1 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Konstruieren Sie die Jacobi-Matrix und führen Sie 3 Iterationen des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $(1,1)$ zur Lösung des Systems durch. (4)

Aufgabe 3 Das nichtlineare Gleichungssystem

$$0 = F(x), \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

soll iterativ gelöst werden. Schreiben Sie eine Funktion, die ein solches Gleichungssystem mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren lösen kann: für einen Startvektor x_0 iteriert man laut Vorschrift

$$x_{k+1} = x_k + h_k,$$

wobei h_k die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$F'(x_k)h_k = -F(x_k)$$

sein soll. Die Iteration soll abgebrochen werden, falls eine vorgegebene Toleranz ε $(= 10^{-12})$ erreicht ist, d.h.,

$$\frac{\|h_k\|_2^2}{\|h_{k-1}\|_2 - \|h_k\|_2} < \varepsilon.$$

Nach einer vorgegebenen maximalen Anzahl $k_{\max}$ ($= 10$) der Iterationsschritte soll das Verfahren ebenfalls abbrechen.

(4)

Aufgabe 4 Schreiben Sie ein Skript, das die Funktion aus Aufgabe 3 an der Funktion

$$F(x) := \begin{pmatrix} x_1 - 0.25\cos x_1 + 0.25\sin x_2 \\ x_2 - 0.25\cos x_1 + 0.5\sin x_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Startvektor $x_0 = (0,0)^T$ testet. Die benötigte Ableitung $F'(x)$ darf analytisch bestimmt werden. Ferner, setzen Sie die letzte Iterierte des Newton-Verfahrens als Lösung x voraus und veranschaulichen Sie, wie im Laufe der Iteration x_k gegen x und $F(x_k)$ gegen Null konvergieren (Plots der absoluten Fehler in semilogarithmischer Darstellung).

(4)

Schicken Sie bitte Ihre Lösungen zu den Aufgaben 3 und 4 (MATLAB Code) bis **spätestens am 20.01.2020** an julian.kappel@student.uni-siegen.de).

Abgabetermin: Dienstag, 21.01.2020 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.