Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

Numerik I

— Blatt 11 (Besprechung: 14.01.2020) —

Aufgabe 1 Die Funktion $\ln(x)$ soll an einer Stelle $a > 0$ näherungsweise berechnet werden. Dazu bestimmen wir eine Lösung der Gleichung $e^x - a = 0$ mit dem Newton-Verfahren.

a) Geben Sie die zugehörige Iterationsvorschrift an.

b) Welche Konvergenzordnung hat das Iterationsverfahren?

c) Berechnen Sie für $a = 1$ und den Startwert $x_0 = 1$ die ersten vier Iterierten $x_1, \ldots, x_4$ mit einem Taschenrechner. Auf wie viele Nachkommastellen stimmen diese mit dem tatsächlichen Wert $\ln(1) = 0$ überein? Erklären Sie Ihre Beobachtung mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe b).

(1+1+2)

Aufgabe 2 Sei $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + x$.

a) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 1$ durch.

b) Konvergiert das Newton-Verfahren für diesen Startwert?

c) Wieviele Nullstellen liegen höchstens im Intervall $[1, 10]$?

(1+1+2)

Aufgabe 3 Gesucht ist der Wert

$$s = \lim_{n\to\infty} \underbrace{2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \ldots + 2\sqrt{3}}}}_{n \text{ mal}}.$$

a) Geben Sie Fixpunktgleichung für s an und bestimmen Sie daraus s.

b) Geben Sie die zugehörige Iterationsfunktion ϕ an. Geben Sie außerdem ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, so dass das Iterationsverfahren $x_{m+1} = \phi(x_m)$ für alle Startwerte $x_0 \in I$ gegen s konvergiert.

c) Geben Sie eine Iterationsfunktion ϕ und ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ an, so dass das Iterationsverfahren $x_{m+1} = \phi(x_m)$ für alle Startwerte $x_0 \in I$ gegen s konvergiert und $|x_m - s|$ in jedem Schritt mindestens halbiert wird. Wieviele Schritte sind höchstens nötig, um einen Fixpunkt mit Genauigkeit 10^{-6} zu berechnen?

(1+1+2)

Aufgabe 4 Es sei $Q_1R_1 = Q_2R_2$ erfüllt mit orthogonalen Matrizen Q_1, $Q_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ und regulären oberen Dreiecksmatrizen R_1, $R_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Dann gibt es eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &d_k \in \{-1, 1\} \text{ für } k = 1, \ldots, N, \\ &R_2 = DR_1, \quad Q_2 = Q_1D. \end{aligned}$$

(4)

Abgabetermin: Dienstag, 14.01.2020 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.