Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

# Numerik I

— Blatt 10 (Besprechung: 07.01.2020) —

**Aufgabe** 1 *(Cholesky- und QR-Zerlegung–Wiederholung)*

(a) Schreiben Sie eine Funktion

```
function [R] = chol_zerlegung(A),
```

welche die Cholesky-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ bestimmt, wobei $R$ die obere rechte Dreiecksmatrix aus der Cholesky-Faktorisierung ist.

(b) Schreiben Sie eine Funktion

```
function [Q,R] = qr_zerlegung(A),
```

welche die QR-Zerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ bestimmt. Es sind lediglich Matrix-Matrix-Produkte für die Berechnung von $\mathbf{Q}$ erlaubt.

(2+2)

**Aufgabe** 2 Sei $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \ldots \geq \lambda_N$ und dazugehörigen Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{R}^N$, die o.B.d.A. als paarweise orthonormal angenommen seien.

a) Zeigen Sie: für $x \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$Ax = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (x^T u_k) u_k.$$

b) Man gebe die Werte $||A^{-1}||_2$ und $\mathrm{cond}_2(A)$ mit Hilfe der Eigenwerte von $A$ an.

c) Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ beziehungsweise dessen fehlerbehafteten Version $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ gebe man diejenigen Vektoren $b \in \mathbb{R}^N$ und $\Delta b \in \mathbb{R}^N$ an, für die folgende Gleichungen erfüllt sind:

i) $||b||_2 = ||A||_2 ||x||_2$

ii) $||\Delta x||_2 = ||A^{-1}||_2 ||\Delta b||_2$

iii) $\frac{||\Delta x||_2}{||x||_2} = \mathrm{cond}_2(A) \frac{||\Delta b||_2}{||b||_2}$.

(1+1+2)

**Aufgabe** 3 Zeigen Sie: Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ gilt $||AB||_F \leq ||A||_2||B||_F$.

(4)

**Aufgabe** 4 Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$$

mittels Householdertransformationen auf obere Dreiecksgestalt. Geben Sie auch die beiden entstehenden Householdermatrizen $\hat{H}_1, \hat{H}_2 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an.

(4)

Schicken Sie bitte Ihre Lösungen zu der Aufgabe 1 (MATLAB Code) bis **spätestens am 06.01.2020** an julian.kappel@student.uni-siegen.de).

**Abgabetermin: Dienstag, 07.01.2020 vor der Übung.**
**Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.**