Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

Numerik I

— Blatt 9 (Besprechung: 17.12.2019) —

Aufgabe 1 Man zeige Folgendes:

a) Die Menge der unteren Dreiecksmatrizen $L \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit positiven Diagonaleinträgen bildet bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

b) Die Cholesky-Faktorisierung $A = LL^T$ einer symmetrischen positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist eindeutig.

(2+2)

Aufgabe 2 Sei

$$||A|| = \sum_{\substack{j=1,\ldots,M \\ k=1,\ldots,N}} |a_{jk}|, \quad A \in \mathbb{R}^{M \times N}.$$

a) Zeigen Sie, dass $||\cdot||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{M \times N}$ definiert.

b) Gibt es im Fall $M = N$ eine Vektornorm $||\cdot||_*$, die $||\cdot||$ induziert, d.h. $||A|| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_*}{||x||_*}$?

(4)

Aufgabe 3

a) Weisen Sie die Abschätzungen

$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{N}||x||_\infty$$

$$||x||_\infty \le ||x||_1 \le N||x||_\infty$$

($x \in \mathbb{R}^N$) nach.

b) Geben Sie für jede der vier Abschätzungen aus a) jeweils einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^N$ an, für den Gleichheit gilt.

(2+2)

Aufgabe 4 Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -9 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}.$$

1. Man berechne die Konditionszahlen $\mathrm{cond}_\infty(A)$ und $\mathrm{cond}_\infty(B)$.

2. Für die Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta b = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \end{pmatrix}, \qquad \Delta\widehat{b} = \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta \end{pmatrix}$$

mit einer kleinen reellen Zahl $\delta > 0$ löse man die Gleichungssysteme

$$Ax = b, \qquad A(x + \Delta x) = b + \Delta b, \qquad A(x + \Delta\widehat{x}) = b + \Delta\widehat{b}.$$

Man vergleiche die jeweiligen relativen Fehler $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ und $\|\Delta\widehat{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ mit der allgemeinen Fehlerabschätzung $\|\Delta x\|/\|x\| \leq \mathrm{cond}(A)\|\Delta b\|/\|b\|$.

(2+2)

Abgabetermin: Dienstag, 17. 12. 2019 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.