Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

Numerik I

— Blatt 8 (Besprechung: 10.12.2019) —

Aufgabe 1 Gegenstand dieser Aufgabe sind Eliminationsmatrizen der Form

$$G_s = \begin{pmatrix} 1 & & & -l_{1s} & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \vdots & & \\ & & & -l_{s-1,s} & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N} \quad \text{für } s = 2,\dots,N.$$

1) Zeigen Sie:
   a) $G_s = I - g_s e_s^T$ mit $g_s = (l_{1s},\dots,l_{s-1,s},0,\dots,0)^T \in \mathbb{R}^N$, $s = 2,\dots,N$.
   b) G_s ist regulär mit

$$G_s^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & l_{1s} & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & \vdots & & \\ & & & l_{s-1,s} & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad s = 2,\dots,N.$$

   c)

$$G_N^{-1}G_{N-1}^{-1}\cdots G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & l_{1N} \\ & 1 & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & l_{N-1,N} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2) Mit Eliminationsmatrizen der Form G_s, $s = N, N-1,\dots,2$, lässt sich (Durchführbarkeit sei hier vorausgesetzt) eine Darstellung der Form

$$L = G_2 G_3 \dots G_N A \qquad (*)$$

gewinnen, wobei $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$ untere Dreiecksmatrix ist. Wie lässt sich Darstellung $(*)$ zur Gewinnung einer sinnvollen Faktorisierung von A verwenden?

(4)

Aufgabe 2 Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3+a & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einem reellen Parameter a. Man berechne die zugehörige LR-Faktorisierung beziehungsweise gebe an, für welchen Parameter a diese nicht existiert. (4)

Aufgabe 3 Zeigen Sie: existiert für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ eine Faktorisierung

$$A = LL^T$$

mit einer regulären Matrix $L \in \mathbb{R}^{N\times N}$, so ist A symmetrisch und positiv definit.

(4)

Aufgabe 4 Berechnen Sie die Cholesky-Faktorisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

Abgabetermin: Dienstag, 10. 12. 2019 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.