Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

Numerik I

— Blatt 5 (Besprechung: 19.11.2019) —

Aufgabe 1 Durch $\langle u, v\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \overline{v}_k,\ u, v \in \mathbb{C}^N$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^N$ definiert. Zeigen Sie für $f, g \in \mathbb{C}^N$ und ihre diskreten Fouriertransformierten $d, e \in \mathbb{C}^N$:

$$\frac{1}{N}\langle f, g\rangle = \langle d, e\rangle.$$

(4)

Aufgabe 2 Für das trigonometrische Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{\frac{ik2\pi x}{L}}$$

gelte $p(x_j) = f_j,\ j = 0, \ldots, N-1$, wobei $f_0, \ldots, f_{N-1} \in \mathbb{C}$,

$$x_j = j\frac{L}{N},\ j = 0, \ldots, N-1.$$

Welche Punkte interpoliert das trigonometrische Polynom

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{N-1} d_{k+M} e^{\frac{ik2\pi x}{L}},$$

wobei man die Koeffizienten $d_M, \ldots, d_{N+M-1}$ durch N-periodische Fortsetzung der Indizes der Koeffizienten $d_0, \ldots, d_{N-1} \in \mathbb{C}$ erhält. Dabei ist $M \in \mathbb{Z}$ fest gewählt.

(4)

Aufgabe 3 Bestimmen Sie das trigonometrische Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{\frac{ik2\pi x}{L}}$$

mit $p(x_j) = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j = 1, \ldots, N-1, \end{cases}$ wobei $x_j = j\frac{L}{N}$, $j = 0, \ldots, N-1$.

(4)

Aufgabe 4 Zu gegebenem trigonometrischen Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{ikx}$$

bezeichne

$$p_s(x) = \sum_{k=0}^{s} d_k e^{ikx}$$

das s-te Abschnittspolynom ($s = 0, \ldots, N-1$). Zeigen Sie: unter allen trigonometrischen Polynomen der Form

$$q(x) = \sum_{k=0}^{s} c_k e^{ikx}$$

mit $0 \leq s \leq N-1$ fest minimiert p_s die Fehlerquadratsumme

$$s(q) = \sum_{j=0}^{N-1} |p(x_j) - q(x_j)|^2,$$

wobei $x_j = \frac{j}{N}, j = 0, \ldots, N-1$.

(4)

Abgabetermin: Dienstag, 19. 11. 2019 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.