

Numerik I

— Blatt 3 (Besprechung: 05.11.2019) —

Aufgabe 1 Auf dem Intervall $[0, 1]$ seien die Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ gegeben. Handelt es sich bei der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 4x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ -2x + 4 & \text{für } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

bezüglich der gegebenen Zerlegung um eine quadratische Splinefunktion?

(4)

Aufgabe 2

Gegeben seien eine äquidistante Zerlegung $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$ des Intervalls $[0, 1]$, es gilt also $x_k = x_{k-1} + h$ für $k = 1, 2, \dots, N$, mit $h = 1/N$. Man betrachte auf diesem Intervall die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Wie groß muss die Zahl N gewählt werden, damit auf dem gesamten Intervall die Differenz zwischen der Funktion f und der interpolierenden

a) linearen Splinefunktion $s \in S_{\Delta,1}$ betragsmäßig kleiner als 0,0025 ausfällt?

b) kubischen Splinefunktion $s \in S_{\Delta,3}$ betragsmäßig kleiner als 0,0024 ausfällt?

(2+2)

Aufgabe 3

Man berechne diejenige natürliche kubische Splinefunktion $S_{\Delta,3}$ zur Zerlegung

$$\Delta = \{0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2\},$$

die die Interpolationsbedingungen $s(0) = 3$, $s(1) = 7$, $s(2) = -1$ erfüllt.

(4)

Aufgabe 4

Gegeben seien eine Zerlegung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ sowie Stützwerte $f_0, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}$.

1. Man weise nach, dass es für jede Zahl $f'_{N-1} \in \mathbb{R}$ genau eine interpolierende quadratische Splinefunktion s gibt, die der Zusatzbedingung $s'(x_{N-1}) = f'_{N-1}$ genügt. Man gebe einen Algorithmus zur Berechnung von s an.

2. Es seien nun die gegebenen Stützwerte Funktionswerte einer dreimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des gegebenen Intervalls, und es sei $f'_{N-1} = f'(x_{N-1})$. Man weise mit Hilfe der Taylorsche Formel die folgende Fehlerabschätzung nach:

$$\max_{k=0, \dots, N-1} |s'(x_k) - f'(x_k)| = O(h) \text{ für } h \rightarrow 0.$$

(2+2)

Abgabetermin: Dienstag, 05. 11. 2019 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.