

### Numerik I

— Blatt 3 (Besprechung: 05.11.2019) —

**Aufgabe 1** Auf dem Intervall  $[0, 1]$  seien die Knoten  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 2$  gegeben. Handelt es sich bei der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 4x + 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ -2x + 4 & \text{für } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

bezüglich der gegebenen Zerlegung um eine quadratische Splinefunktion?

(4)

### Aufgabe 2

Gegeben seien eine äquidistante Zerlegung  $\Delta = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$  des Intervalls  $[0, 1]$ , es gilt also  $x_k = x_{k-1} + h$  für  $k = 1, 2, \dots, N$ , mit  $h = 1/N$ . Man betrachte auf diesem Intervall die Funktion  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

Wie groß muss die Zahl  $N$  gewählt werden, damit auf dem gesamten Intervall die Differenz zwischen der Funktion  $f$  und der interpolierenden

a) linearen Splinefunktion  $s \in S_{\Delta,1}$  betragsmäßig kleiner als 0,0025 ausfällt?

b) kubischen Splinefunktion  $s \in S_{\Delta,3}$  betragsmäßig kleiner als 0,0024 ausfällt?

(2+2)

### Aufgabe 3

Man berechne diejenige natürliche kubische Splinefunktion  $S_{\Delta,3}$  zur Zerlegung

$$\Delta = \{0 = x_0 < x_1 = 1 < x_2 = 2\},$$

die die Interpolationsbedingungen  $s(0) = 3$ ,  $s(1) = 7$ ,  $s(2) = -1$  erfüllt.

(4)

### Aufgabe 4

Gegeben seien eine Zerlegung  $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b\}$  des Intervalls  $[a, b]$  sowie Stützwerte  $f_0, f_1, \dots, f_N \in \mathbb{R}$ .

1. Man weise nach, dass es für jede Zahl  $f'_{N-1} \in \mathbb{R}$  genau eine interpolierende quadratische Splinefunktion  $s$  gibt, die der Zusatzbedingung  $s'(x_{N-1}) = f'_{N-1}$  genügt. Man gebe einen Algorithmus zur Berechnung von  $s$  an.

2. Es seien nun die gegebenen Stützwerte Funktionswerte einer dreimal stetig differenzierbaren Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  des gegebenen Intervalls, und es sei  $f'_{N-1} = f'(x_{N-1})$ . Man weise mit Hilfe der Taylorsche Formel die folgende Fehlerabschätzung nach:

$$\max_{k=0, \dots, N-1} |s'(x_k) - f'(x_k)| = O(h) \text{ für } h \rightarrow 0.$$

(2+2)

**Abgabetermin: Dienstag, 05. 11. 2019 vor der Übung.**  
**Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.**