Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

Numerik I

— Blatt 2 (Besprechung: 29.10.2019) —

Aufgabe 1 (Zur quadratischen Interpolation in Funktionstafeln)
Eine 3−mal differenzierbare Abbildung f von $[a, b] \subset \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sei mit einer Schrittweite $h > 0$ tabelliert. Es seien

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3, \;\; x_i - x_{i-1} = h \;\; (i = 1, 2, 3)$$

benachbarte Stützstellen der Tafel und $Q(x) := \frac{1}{2}[P_{012}(x) + P_{123}(x)]$.
Zeigen Sie:

1) Es gilt die Darstellung

$$Q(x) = f(x_1) + f[x_1, x_2](x - x_1) + \frac{1}{2}(f[x_0, x_1, x_2] + f[x_1, x_2, x_3]) \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

2) Unter der Voraussetzung $|f^{''}(t)| \leq M \;\; (t \in [a, b])$ gilt für $x_1 < x < x_2$ die Abschätzung

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{1}{16}h^3 M.$$

(2+2)

Aufgabe 2

Es seien $T_n(z)$ die Tschebyscheff-Polynome. Die Tschebyscheff-Lobatto-Punkte $s_k^{(n)} = \cos(\frac{\pi k}{n})$ für $0 \leq k \leq n$ sind Punkte in $-1 \leq z \leq 1$, wo $T(z)$ maximal ist, d.h. ± 1.

1) Zeigen Sie

$$w(z) = \prod_{k=0}^{n}(z - s_k^{(n)}) = \frac{1}{2^n}(T_{n+1}(z) - T_{n-1}(z))$$

für $n \geq 1$.

2) Zeigen Sie, dass man die baryzentrischen Gewichte

$$\beta_k := \prod_{l=0, l\neq k}^{n} (\tau_k - \tau_l)^{-1}$$

mithilfe der Formel $\beta_k = \frac{1}{w'(\tau_k)}$ berechnen kann. Identifizieren Sie die baryzentrischen Gewichte für die Tschebyscheff-Lobatto-Punkte.

(2+2)

Aufgabe 3

Ein Polynom P soll an der Stelle x ausgewertet werden. Dabei kann man naiv vorgehen und

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ausrechnen, oder zuerst das Polynom geschickt aufschreiben

$$P(x) = ((\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots)x + a_1)x + a_0$$

und die Klammern von innen nach außen berechnen (das Horner-Schema).

(a) Schreiben Sie eine Funktion

```
function y = naive(x,a)
```

die ein Polynom, das durch den Koeffizientenvektor `a` gegeben ist, an der Stelle `x` naiv auswertet.

(b) Schreiben Sie eine Funktion

```
function y = horner(x,a)
```

die ein Polynom, das durch den Koeffizientenvektor `a` gegeben ist, an der Stelle `x` mit dem Hornerschema auswertet.

(2+2)

Aufgabe 4

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ soll auf dem Intervall I durch ein Polynom P vom Grad m approximiert werden (Polynominterpolation). Dazu seien $m+1$ *Stützstellen* $x_0, \ldots, x_m \in I$ gegeben, an denen die Funktion mit dem Polynom übereinstimmen soll, d.h.

$$P(x_i) \overset{!}{=} f(x_i) \tag{1}$$

Man ermittelt also $m+1$ *Stützwerte*

$$y_i := f(x_i), \quad 0 \le i \le m$$

und bestimmt das Interpolationspolynom

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

aus dem zu (1) äquivalenten linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{m-1} & x_0^m \\ & & \ldots & & \\ 1 & x_m & \ldots & x_m^{m-1} & x_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \ldots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die Matrix in (2) ist die Transponierte einer *Vandermonde-Matrix*.

(a) Schreiben Sie eine Funktion

```
function a = polynomInterpolation(x,y)
```

die anhand der Stützstellen `x` und der Stützwerte `y` den Koeffizientenvektor `a` des Interpolationspolynoms bestimmt. Sie dürfen nicht den vordefinierten Befehl `vander` oder ähnliche benutzen.
Tipp: Die Lösung eines linearen Gleichungssystems der Form $Mv = w$ ist

```
>> v=M\w;
```

(b) Schreiben Sie ein Skript, das für $m = 10$ die $m + 1$ äquidistante Stützstellen

$$x_i = -1 + \frac{2i}{m}, \quad 0 \leq i \leq m$$

erzeugt, die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

an diesen Stellen durch ein Polynom P vom Grad m interpoliert, f und P auf dem Intervall [-1,1] in einem Fenster plottet und die Interpolationspunkte markiert. Benutzen Sie zur Interpolation die selbstgeschriebene Funktion aus (a) und zur Auswertung des Polynoms die selbstgeschriebene Funktion `horner` aus der Aufgabe 3.

(c)* Welche Probleme treten auf wenn man die Anzahl der Stützstellen stark erhöht? Berechnen Sie hierfür die Kondition der *Vandermonde-Matrix* für $2^k, k = 1, \ldots, 6$ Stützstellen, beispielsweise mit dem Befehl `cond`.

(2+2+*2 (Bonus)*)

Schicken Sie bitte Ihre Lösungen zu den Aufgaben 3 und 4 (MATLAB Code) bis **spätestens am 28.10.2019** an julian.kappel@student.uni-siegen.de).

Abgabetermin: Dienstag, 29. 10. 2019 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.