Universität Siegen
Department Mathematik
Prof. Dr. Robert Plato
Dr. Adam Czapliński

WiSe 2019/20

Numerik I

— Blatt 1 (Besprechung: 22.10.2019) —

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die ohne Zuhilfenahme elektronischer Hilfsmittel das newtonsche Interpolationspolynom zu den drei Stützpunkten $(0,0), (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ und $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

b) Bestimmen Sie damit eine Näherung für $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und schätzen Sie den Betrag des Fehlers mit Hilfe der Formel für den Interpolationsfehler aus der Vorlesung ab. Bestimmen Sie zum Vergleich mit Hilfe eines Taschenrechners den Betrag des exakten Fehlers.

(2+2)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie reelle Zahlen a, p und q derart, dass die beiden folgenden Aussagen für das landausche Symbol korrekt sind:

a) $(h+h^2)(h+h^3) = O(h^p)$ für $h \to 0$,

b) $\frac{N+3N^2}{2N+N^2} = a + O(\frac{1}{N^q})$ für $N \to \infty$.

(2+2)

Aufgabe 3

Die *Hermite-Interpolationsaufgabe* besteht darin, zu vorgegebenen Knoten $x_0, \dots, x_n$ sowie Daten $y_0, \dots, y_n$ und $y_0', \dots, y_n'$ ein Polynom $\mathcal{P}$ vom Grad $2n+1$ so zu bestimmen, dass

$$\mathcal{P}(x_j) = y_j \quad \text{und} \quad \mathcal{P}'(x_j) = y_j' \quad \text{für } j = 0, \dots, n. \tag{1}$$

1. Zeigen Sie, dass höchstens ein solches Interpolationspolynom $\mathcal{P} \in \Pi_{2n+1}$ existiert.

2. Wir zeigen nun die Existenz des Hermite-Interpolationspolynoms, indem wir Polynome $\mathcal{Q}_i$, $\mathcal{R}_i \in \Pi_{2n+1}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i(x_j) &= \delta_{ij}, \quad & \mathcal{Q}_i'(x_j) &= 0, \\ \mathcal{R}_i(x_j) &= 0, \quad & \mathcal{R}_i'(x_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

für i, $j = 0, \dots, n$ konstruieren und damit die Lösung

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \mathcal{Q}_j(x) + \sum_{j=0}^{n} y_j' \mathcal{R}_j(x)$$

von (1) explizit angeben.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{Q}_i(x) = (\alpha_i x + \beta_i)L_i(x)^2 \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_i(x) = (\tilde{\alpha}_i x + \tilde{\beta}_i)L_i(x)^2$$

gilt, wobei L_i das i-te Lagrange-Grundpolynom bezeichnet.

b) Berechnen Sie die Koeffizienten $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$, ohne die Ableitung der Lagrange-Grundpolynome explizit auszurechnen.

(4)

Aufgabe 4

Implementieren Sie die Lagrange Interpolation in MATLAB. Ihre MATLAB Funktion soll eine beliebige Anzahl von Stützpunkten akzeptieren und das interpolierende Polynom plotten. Schicken Sie bitte Ihre Lösung (MATLAB Code) und Plots zu mindestens drei verschiedenen Beispielen als .eps Dateien bis **spätestens am 21.10.2019** an julian.kappel@student.uni-siegen.de).

(4)

Abgabetermin: Dienstag, 22. 10. 2019 vor der Übung.
Möglichst Gruppenabgabe mit Gruppen zu höchstens 2 Studierenden.