

Ihr Name:

Ihr Vorname:

Ihre Matrikelnr.:

## Testat / 13. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3* – Version A

Wintersemester 2019/20, 14.1.2020

**Aufgabe 1** (3 Punkte). Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^3 + 2 \\ 3xy^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Stammfunktion und bestimmen Sie diese Stammfunktion gegebenenfalls.

**Aufgabe 2** (3 Punkte). Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 5xy\}.$$

**Aufgabe 3** (2 Punkte). Berechnen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten das Volumen der Kugelhälfte

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \leq 0\}.$$

**Aufgabe 4** (2 Punkte). Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem für die räumlich unbeschränkte Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \text{ für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (2 Punkte). Es sei  $\mathcal{C}$  eine orientierte glatte Kurve in  $\mathbb{R}^d$ , und  $\mathcal{C}_-$  bezeichne die gleiche Kurve wie  $\mathcal{C}$ , jedoch mit entgegengesetzter Orientierung. Sei  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalarwertige stetige Funktion, und  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei eine vektorwertige stetige Funktion.

- Wie stehen die beiden Kurvenintegrale erster Art  $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$  und  $\int_{\mathcal{C}_-} f \, ds$  in Zusammenhang?
  - Wie stehen die beiden Kurvenintegrale zweiter Art  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s}$  und  $\int_{\mathcal{C}_-} F \cdot d\vec{s}$  in Zusammenhang?
- Eine Begründung ist bei dieser Aufgabe nicht erforderlich.

### Hinweise (bitte zuerst lesen):

- Abgabe der Lösungen spätestens 60 Minuten nach Beginn. Das Aufgabenblatt ist ebenfalls abzugeben, nicht jedoch Schmierblätter.
- Bitte notieren Sie auf jedem Lösungsblatt sowie dem Aufgabenblatt Ihren Namen.
- Sämtliche elektronischen Geräte müssen vollständig ausgeschaltet sein und sich in den abgegebenen Taschen oder Jacken befinden. Sie können gegebenenfalls kurz nach Beginn noch nachträglich abgegeben werden.
- Bitte lassen Sie die Kästchen auf der linken Seite frei.

*Viel Erfolg!*

Ihr Name:

Ihr Vorname:

Ihre Matrikelnr.:

## Testat / 13. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3* – Version B

Wintersemester 2019/20, 14.1.2020

**Aufgabe 1** (3 Punkte). Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x^2y + 1 \\ x^3 + 2 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie die notwendigen Bedingungen für die Existenz einer Stammfunktion und bestimmen Sie diese Stammfunktion gegebenenfalls.

**Aufgabe 2** (3 Punkte). Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3xy\}.$$

**Aufgabe 3** (2 Punkte). Berechnen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten das Volumen der Kugelhälfte

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \mid 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \leq 0\}.$$

**Aufgabe 4** (2 Punkte). Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem für die räumlich unbeschränkte Wellengleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \text{ für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 5** (2 Punkte). Es sei  $\mathcal{C}$  eine orientierte glatte Kurve in  $\mathbb{R}^d$ , und  $\mathcal{C}_-$  bezeichne die gleiche Kurve wie  $\mathcal{C}$ , jedoch mit entgegengesetzter Orientierung. Sei  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  eine skalarwertige stetige Funktion, und  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^d$  sei eine vektorwertige stetige Funktion.

- Wie stehen die beiden Kurvenintegrale zweiter Art  $\int_{\mathcal{C}} F \cdot d\vec{s}$  und  $\int_{\mathcal{C}_-} F \cdot d\vec{s}$  in Zusammenhang?
- Wie stehen die beiden Kurvenintegrale erster Art  $\int_{\mathcal{C}} f \, ds$  und  $\int_{\mathcal{C}_-} f \, ds$  in Zusammenhang?

Eine Begründung ist bei dieser Aufgabe nicht erforderlich.

### Hinweise (bitte zuerst lesen):

- Abgabe der Lösungen spätestens 60 Minuten nach Beginn. Das Aufgabenblatt ist ebenfalls abzugeben, nicht jedoch Schmierblätter.
- Bitte notieren Sie auf jedem Lösungsblatt sowie dem Aufgabenblatt Ihren Namen.
- Sämtliche elektronischen Geräte müssen vollständig ausgeschaltet sein und sich in den abgegebenen Taschen oder Jacken befinden. Sie können gegebenenfalls kurz nach Beginn noch nachträglich abgegeben werden.
- Bitte lassen Sie die Kästchen auf der linken Seite frei.

*Viel Erfolg!*