©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

10. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0,\\
u(0,t) &= 0, \quad u(\pi,t) = 0 \text{ für } t \ge 0,\\
u(x,0) &= 3\sin(3x) + 4\sin(7x) \text{ für } 0 \le x \le \pi,\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sin(3x) + 8\sin(4x) \text{ für } 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung mit der Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } 0 \le x \le 1,\ t \ge 0,\\
u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0 \text{ für } t \ge 0,\\
u(x,0) &= 5\sin(3\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = a \text{ für } 0 \le x \le 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Man zeige: Für beliebige Koeffizienten

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_d \qquad \text{mit} \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_d^2 = 1$$

und eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet

$$u(x,t) = f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_d x_d - ct\right) \qquad \text{für} \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \bigtriangleup u(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d,\ t \ge 0.$$

Dabei wird der Laplace-Operator auf folgende Weise definiert:

$$\bigtriangleup u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x,t) + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Abgabe der Lösungen spätestens am 17.12.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.