©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

12. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Man berechne den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

durch die obere Halbkugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ z \geq 0$. Die positive Seite der Fläche liege innen. (Man verwende die Kugelkoordinaten in der Version aus der Vorlesung!)

Aufgabe 2 (4 Punkte). Man berechne unter Anwendung des gaußschen Integralsatzes den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{pmatrix} zx \\ zy \\ z^2 \end{pmatrix}$$

aus dem Zylinder $Z = \left\{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq b \right\}$ nach außen. Hierbei sind a und b positive Konstanten.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie unter Anwendung des gaußschen Integralsatzes den Inhalt der von der Astroide

$$\gamma = \left\{ R \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix} \mid 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$$

eingeschlossenen Fläche. Hierbei ist $R > 0$ eine Konstante.

Abgabe der Lösungen spätestens am 21.01.2020 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 12. Übung

Aufgabe 1. Eine passende Parametrisierung für die betrachtete Fläche A ist

$$T(\varphi,\delta)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\delta \\ r\sin\varphi\cos\delta \\ r\sin\delta \end{pmatrix}, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\delta\le\tfrac{\pi}{2}.$$

Mit dieser Parametrisierung gilt

$$\vec{u}(T(\varphi,\delta))=\begin{pmatrix} r\sin\varphi\cos\delta \\ r\cos\varphi\cos\delta \\ \sqrt{r^2\cos^2\delta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \end{pmatrix}=r\cos\delta\begin{pmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi \\ 1\end{pmatrix}.$$

Weiter gilt (siehe Vorlesung beziehungsweise Skript)

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial\delta}(\varphi,\delta)=r^2\cos\delta\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\delta\\ \sin\varphi\cos\delta\\ \sin\delta\end{pmatrix}$$

und damit

$$\vec{u}(T(\varphi,\delta))\cdot\Big(\frac{\partial T}{\partial\varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial\delta}(\varphi,\delta)\Big)=r^3\cos^2\delta\Big(2\sin\varphi\cos\varphi\cos\delta+\sin\delta\Big).$$

Für den zu bestimmenden Fluss gilt daher

$$\begin{aligned}\int_A \vec{u}\cdot d\vec{\sigma} &= -r^3\Big(\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 2\sin\varphi\cos\varphi\cos^3\delta\,d\varphi\,d\delta+\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\cos^2\delta\sin\delta\,d\varphi\,d\delta\Big)\\ &= -r^3\Big(2\underbrace{\Big(\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\Big)}_{=0}\Big(\int_0^{\pi/2}\cos^3\delta\,d\delta\Big)+2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2\delta\sin\delta\,d\delta\Big)\\ &= -2\pi r^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\delta\sin\delta\,d\delta.\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich das negative Vorzeichen aus der Forderung, dass innen die positive Seite der Fläche liegt. Den Wert 0 des einen Integrals erhält man direkt aus der Identität $\int\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\sin^2\varphi+c$.

Schließlich ergibt die Substitution $v=\cos\delta$ Folgendes:

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\delta\sin\delta\,d\delta=-\int_1^0 v^2\,dv=\int_0^1 v^2\,dv=\frac{v^3}{3}\Big|_{v=0}^{v=1}=\frac{1}{3},$$

wobei $dv=-\sin\delta\,d\delta$ sowie $\delta=0\Longrightarrow v=1$ und $\delta=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow v=0$ eingegangen ist. Daraus erhält man schließlich den gesuchten Fluss:

$$\int_A\vec{u}\cdot d\vec{\sigma}=-\frac{2\pi}{3}r^3.$$

Aufgabe 2. Es gilt

$$\operatorname{div}\vec{u}(x,y,z)=z+z+2z=4z,$$

und der gaußsche Integralsatz liefert dann

$$\begin{aligned}\int_A\vec{u}\cdot d\vec{\sigma} &= \int_Z\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x})\,d\vec{x}=\int_0^b\int_0^{2\pi}\int_0^a\operatorname{div}\vec{u}(r,\varphi,z)\,r dr\,d\varphi\,dz\\ &= \int_0^b\int_0^{2\pi}\int_0^a 4z\,rdr\,d\varphi\,dz=\Big(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\Big)\Big(\int_0^a 2r\,dr\Big)\Big(\int_0^b 2z\,dz\Big)\\ &= 2\pi a^2b^2.\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet A die Randfläche des Zylinders Z.

Aufgabe 3. Hier gilt

$$\vec{\gamma}\,'(t) = 3R \begin{pmatrix} -\cos^2 t \sin t \\ \sin^2 t \cos t \end{pmatrix}$$

und damit z. B.

$$\mu(D) = \int_0^{2\pi} \gamma_1(t)\gamma_2'(t)\,dt = 3R^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t\,dt,$$

wobei D die betrachtete Fläche bezeichnet. Für die weiteren Berechnungen verwenden wir die beiden aus Vorlesung und Skript bekannten Additionstheoreme

$$\cos^2 t = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2t), \quad \sin^2 t = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Das ergibt

$$\mu(D) = \tfrac{3}{8}R^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)^2 (1 - \cos 2t)\,dt = \tfrac{3}{16}R^2 \int_0^{4\pi} (1 + \cos s)^2 (1 - \cos s)\,ds,$$

wobei die Substitution $s = 2t$ verwendet wurde. (Damit gilt $\frac{1}{2}ds = dt$ sowie $t = 0 \Longrightarrow s = 0$ und $t = 2\pi \Longrightarrow s = 4\pi$.) Es gilt

$$\begin{aligned}(1 + \cos s)^2 (1 - \cos s) &= (1 + \cos s)((1 + \cos s)(1 - \cos s)) = (1 + \cos s)(1 - \cos^2 s) \\ &= 1 - \cos^2 s + \cos s - \cos^3 s.\end{aligned}$$

Mit dem zweiten der beiden oben angegebenen Additionstheoreme beziehungsweise partieller Integration erhält man Folgendes:

$$\begin{aligned}&\int \cos^2 s\,ds = \tfrac{1}{2} \int 1 + \cos(2s)\,ds = \tfrac{1}{2}\Big(s + \tfrac{1}{2}\sin 2s\Big) + c, \\ &\int \cos^3 s\,ds = \int \underbrace{\cos^2 s}_{=u}\underbrace{\cos s}_{=v'}\,ds = \cos^2 s \sin s + \int 2 \cos \sin^2 s\,ds = \cos^2 s \sin s + \tfrac{2}{3}\sin^3 s + c.\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}\int (1 + \cos s)^2 (1 - \cos s)\,ds &= \int 1 - \cos^2 s + \cos s - \cos^3 s\,ds \\ &= s - \tfrac{1}{2}\Big(s + \tfrac{1}{2}\sin 2s\Big) + \sin s - \cos^2 s \sin s - \tfrac{2}{3}\sin^3 s + c \\ &= \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{4}\sin 2s + \sin s - \cos^2 s \sin s - \tfrac{2}{3}\sin^3 s + c =: F(s) + c.\end{aligned}$$

Das ergibt schließlich

$$\mu(D) = \tfrac{3}{16}R^2 \int_0^{4\pi} (1 + \cos s)^2 (1 - \cos s)\,ds = \tfrac{3}{16}R^2 F(s)\Big|_{s=0}^{s=4\pi} = \tfrac{3}{16}R^2 \cdot 2\pi = \tfrac{3}{8}\pi R^2.$$