©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

11. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche eines Torus. Sie besitzt die Parameterdarstellung

$$T(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} r\sin\varphi \\ (R + r\cos\varphi)\cos\delta \\ (R + r\cos\varphi)\sin\delta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi, \delta \le 2\pi,$$

mit $0 < r < \frac{R}{2}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Berechnen Sie den Inhalt des Kugeloberflächensegments $A = \{T(\varphi,\delta) \mid 0 \le \varphi \le \pi,\ \delta_0 \le \delta \le \delta_1\}$ mit

$$T(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\delta \\ R\sin\varphi\cos\delta \\ R\sin\delta \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \varphi \le \pi, \quad \delta_0 \le \delta \le \delta_1,$$

mit Konstanten $R > 0$ und $0 \le \delta_0 < \delta_1 \le \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie den Inhalt der Fläche

$$A = \Big\{(x, y, 2\cosh x + y\sqrt{3}) \mid 0 \le x, y \le 1\Big\}.$$

Abgabe der Lösungen spätestens am 07.01.2020 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 11. Übung

Aufgabe 1. Hier gilt

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi\cos\delta \\ -r\sin\varphi\sin\delta \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(R+r\cos\varphi)\sin\delta \\ (R+r\cos\varphi)\cos\delta \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta) &= \begin{pmatrix} -r(R+r\cos\varphi)\sin\varphi\cos^2\delta - r(R+r\cos\varphi)\sin\varphi\sin^2\delta \\ -r(R+r\cos\varphi)\cos\varphi\cos\delta \\ -r(R+r\cos\varphi)\cos\varphi\sin\delta \end{pmatrix} \\ &= -r(R+r\cos\varphi)\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi\cos\delta \\ \cos\varphi\sin\delta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta)\right| &= r(R+r\cos\varphi)\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi(\cos^2\delta+\sin^2\delta)} \\ &= r(R+r\cos\varphi)\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi} = r(R+r\cos\varphi).\end{aligned}$$

Für den Inhalt $\mu(A)$ der betrachteten Fläche A erhält man somit

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int_A 1\,d\sigma = \int_A\left|\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta)\right|d\varphi\,d\delta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R+r\cos\varphi)\,d\varphi\,d\delta \\ &= 4\pi^2 rR + 2\pi r^2\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{=0} = 4\pi^2 rR.\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Hier gilt

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\cos\delta \\ R\cos\varphi\cos\delta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta) = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi\sin\delta \\ -R\sin\varphi\sin\delta \\ R\cos\delta \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta) &= \begin{pmatrix} R^2\cos^2\delta\cos\varphi \\ R^2\cos^2\delta\sin\varphi \\ R^2\sin^2\varphi\cos\delta\sin\delta + R^2\cos^2\varphi\cos\delta\sin\delta \end{pmatrix} \\ &= R^2\begin{pmatrix} \cos^2\delta\cos\varphi \\ \cos^2\delta\sin\varphi \\ \cos\delta\sin\delta \end{pmatrix} = R^2\cos\delta\begin{pmatrix} \cos\delta\cos\varphi \\ \cos\delta\sin\varphi \\ \sin\delta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta)\right| &= R^2\cos\delta\sqrt{\cos^2\delta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\sin^2\delta} \\ &= R^2\cos\delta\sqrt{\cos^2\delta+\sin^2\delta} = R^2\cos\delta.\end{aligned}$$

Für den Inhalt $\mu(A)$ der betrachteten Fläche A erhält man somit

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int_A 1\,d\sigma = \int_A\left|\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi,\delta)\times\frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi,\delta)\right|d(\varphi,\delta) = R^2\int_0^{\pi}\int_{\delta_0}^{\delta_1}\cos\delta\,d\varphi\,d\delta \\ &= R^2(\pi-0)\int_{\delta_0}^{\delta_1}\cos\delta\,d\delta = \pi R^2\sin\delta\Big|_{\delta_0}^{\delta_1} = \pi R^2(\sin\delta_1-\sin\delta_0).\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Es ist $A = \Big\{ \Big(x, y, g(x,y)\Big) \mid 0 \le x, y \le 1 \Big\}$ mit $g(x,y) = 2\cosh x + y\sqrt{3}$ für $0 \le x, y \le 1$. Man erhält

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2\sinh x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \sqrt{3},\\
&1 + \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Big)^2 = 1 + 4\sinh^2 x + 3 = 4(1+\sinh^2 x) = 4\cosh^2 x,
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_A 1\, d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{4\cosh^2 x}\, dy\, dx = 2\int_0^1 (\cosh x)\Big|_{y=0}^{y=1} dx\\
&= 2\sinh x \Big|_{x=0}^{x=1} = (e^x - e^{-x})\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{e^2 - 1}{e}.
\end{aligned}$$