©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

10. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0,\\
u(0,t) &= 0, \quad u(\pi,t) = 0 \text{ für } t \ge 0,\\
u(x,0) &= 3\sin(3x) + 4\sin(7x) \text{ für } 0 \le x \le \pi,\\
\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sin(3x) + 8\sin(4x) \text{ für } 0 \le x \le \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Wellengleichung mit der Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } 0 \le x \le 1,\ t \ge 0,\\
u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0 \text{ für } t \ge 0,\\
u(x,0) &= 5\sin(3\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = a \text{ für } 0 \le x \le 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Man zeige: Für beliebige Koeffizienten

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_d \qquad \text{mit} \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_d^2 = 1$$

und eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet

$$u(x,t) = f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_d x_d - ct\right) \qquad \text{für} \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \,\triangle\, u(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d,\ t \ge 0.$$

Dabei wird der Laplace-Operator auf folgende Weise definiert:

$$\triangle\, u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x,t) + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Abgabe der Lösungen spätestens am 17.12.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 10. Übung

Aufgabe 1. Die allgemeine Lösung des gegebenen Anfangs-Randwertproblems für u ohne Berücksichtigung der Anfangsbedingung ist gemäß Vorlesung von der Form (hier ist $L = \pi$ und $c = 1$)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\Big(c_n \cos(nt) + d_n \sin(nt)\Big) \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0.$$

Eine Anfangsbedingung lautet

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \overset{!}{=} 3\sin(3x) + 4\sin(7x) \text{ für } 0 \le x \le \pi,$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert $c_3 = 3$, $c_7 = 4$ und $c_n = 0$ sonst. Die zweite Anfangsbedingung ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \sin(nx) \overset{!}{=} \sin(3x) + 8\sin(4x) \text{ für } 0 \le x \le \pi.$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert $3d_3 = 1, 4d_4 = 8$ und $d_n = 0$ sonst. Die Lösung u des gegebenen Anfangs-Randwertproblems ist damit

$$u(x,t) = \sin(3x)\Big(3\cos(3t) + \tfrac{1}{3}\sin(3t)\Big) + 2\sin(4x)\sin(4t) + 4\sin(7x)\cos(7t)$$

für $0 \le x \le \pi,\ t \ge 0$.

Aufgabe 2. Die allgemeine Lösung des gegebenen Anfangs-Randwertproblems für u ohne Berücksichtigung der Anfangsbedingung ist gemäß Vorlesung von der Form (hier ist $L = 1$ und $c = 4$)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\Big(c_n \cos(4n\pi t) + d_n \sin(4n\pi t)\Big) \text{ für } 0 \le x \le 1,\ t \ge 0.$$

Eine Anfangsbedingung lautet

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) \overset{!}{=} 5\sin(3\pi x) \text{ für } 0 \le x \le 1,$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert $c_3 = 5$ und $c_n = 0$ für $n \ne 3$. Die zweite Anfangsbedingung ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 4n\pi d_n \sin(n\pi x) \overset{!}{=} a \text{ für } 0 \le x \le 1.$$

Hier gilt gemäß Vorlesung

$$d_n = \frac{a \cdot 2}{4\pi n}\int_0^1 \sin n\pi y\, dy = -\frac{a}{2\pi^2 n^2}\cos n\pi y\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{a}{2\pi^2 n^2}\Big((-1)^n - 1\Big) = \frac{a}{2\pi^2 n^2}\Big((1 - (-1)^n\Big)$$

für $n = 1, 2, \ldots$ beziehungsweise

$$d_{2n} = 0 \text{ für } n = 1, 2, \ldots, \qquad d_{2n+1} = \frac{a}{\pi^2(2n+1)^2} \text{ für } n = 0, 1, \ldots\ .$$

Die Lösung u des gegebenen Anfangs-Randwertproblems ist damit

$$u(x,t) = 5\sin(3\pi x)\cos(12\pi t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{\pi^2(2n+1)^2} \sin\Big((2n+1)\pi x\Big)\sin\Big(4(2n+1)\pi t\Big).$$

Aufgabe 3. Sei $z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_d x_d - ct$, dann gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial t}(x,t) f'(z)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-cf'(z)\right) = c^2 f''(z) \text{ für } \ t \geq 0.$$

Außerdem

$$\begin{aligned}
\triangle\, u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}(x,t) f'(z)\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}(x,t) f'(z)\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\partial z}{\partial x_d}(x,t) f'(z)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\alpha_1 f'(z)\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\alpha_2 f'(z)\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\alpha_d f'(z)\right)\\
&= f''(z)\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_d^2\right)\\
&= f''(z).
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist $u(x,t) = f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_d x_d - ct\right)$ eine Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \triangle\, u(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0. \qquad \square$$