©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

9. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem für die inhomogene Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \cos t \sin 2x \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ für } t \ge 0, \qquad u(x,0) = 0 \text{ für } 0 \le x \le \pi.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2\cos x \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,\ t \ge 0,$$
$$u(0,t) = 1, \quad u(2\pi,t) = 1 \text{ für } t \ge 0, \qquad u(x,0) = \cos x + 3\sin(4x) \text{ für } 0 \le x \le 2\pi.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte (2+2)). Lösen Sie die folgenden beiden Anfangswertprobleme für die räumlich unbeschränkte homogene Wellengleichung:

a)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = 6\sin 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R};$$

b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 5\cos 2x \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Abgabe der Lösungen spätestens am 10.12.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 9. Übung

Aufgabe 1. Es handelt sich um ein Anfangs-Randwertproblem für eine inhomogene Diffusionsgleichung mit Nullrandbedingungen und Nullanfangsbedingung sowie der Inhomogenität

$$f(x,t) = \cos t \sin 2x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0.$$

mit $f_2(t) = \cos t$ und $f_n(t) = 0$ für n sonst. Gemäß Vorlesung ist die Lösung u von der Form (hier mit $L = \pi$ und $c = \frac{1}{2}$)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\int_0^t e^{-(cn\pi/L)^2(t-\tau)} f_n(\tau) \Big] d\tau \sin\Big(n\frac{\pi}{L}x\Big) = \Big(\int_0^t e^{\tau-t} \cos\tau \, d\tau \Big) \sin 2x$$

für $0 \le x \le \pi,\ t \ge 0$. Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\tau-t} \cos\tau \, d\tau &= e^{\tau-t} \sin\tau \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t e^{\tau-t} \sin\tau \, d\tau \\
&= (e^0 \sin t - e^t \sin 0) + e^{\tau-t} \cos\tau \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t e^{\tau-t} \cos\tau \, d\tau \\
\Rightarrow \quad \int_0^t e^{\tau-t} \cos\tau \, d\tau &= \tfrac{1}{2}(\sin t + \cos t - e^{-t}) \text{ für } t \ge 0.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist damit

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}(\sin t + \cos t - e^{-t}) \sin(2x) \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0.$$

Aufgabe 2. Die Funktion $\varphi(x,t) = \cos x$ für $0 \le x \le 2\pi$ erfüllt $\varphi(0,t) = 1$ und $\varphi(2\pi,t) = 1$. Es löst damit eine Funktion u das vorgegebene Problem, falls die transformierte Funktion $v = u - \varphi$ das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = 2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,\ t \ge 0, \\
&v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \text{ für } t \ge 0, \qquad v(x,0) = 3\sin 4x \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,
\end{aligned}$$

löst. Dabei ist noch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = 0 \text{ und } &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,t) = -\cos x \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,\ t \ge 0, \\
v(x,0) &= u(x,0) - \cos x \text{ für } 0 \le x \le 2\pi
\end{aligned}$$

berücksichtigt.

Die allgemeine Lösung des gegebenen Anfangs-Randwertproblems für v ohne Berücksichtigung der Anfangsbedingung ist von der Form

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{1}{2}nx) e^{-\frac{1}{2}n^2 t} \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,\ t \ge 0.$$

Die Anfangsbedingung lautet

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{1}{2}nx) \stackrel{!}{=} 3\sin 4x \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert $b_8 = 3$ und $b_n = 0$ für $n \ne 8$ beziehungsweise

$$v(x,t) = 3\sin(4x) e^{-32t} \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,\ t \ge 0.$$

Die Lösung u des gegebenen Anfangs-Randwertproblems ist damit

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x,t) = 3\sin(4x) e^{-32t} + \cos x \text{ für } 0 \le x \le 2\pi,\ t \ge 0.$$

Aufgabe 3. a) Die Lösung ist gemäß Vorlesung von der Form (hier ist $c = 1$)

$$u(x,t) = 3(\sin(3(x-t)) + \sin(3(x+t))), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

b) Die Lösung ist gemäß Vorlesung von der Form (hier ist $c = \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \int_{x-\frac{1}{2}t}^{x+\frac{1}{2}t} 5 \cos 2\xi \, d\xi = \frac{5}{2} \Big(\sin 2\xi \Big|_{\xi = x-\frac{1}{2}t}^{\xi = x+\frac{1}{2}t} \Big) \\ &= \frac{5}{2} \Big(\sin(2x+t) - \sin(2x-t) \Big), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$