©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

8. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Bestimmen Sie auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ die Fourier-Reihe zu der Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 6\sin 2x$ für $-\pi \le x \le \pi$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Bestimmen Sie auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ die Fourier-Reihe zu der Funktion $f(x) = \frac{1}{2\pi} - 2e^{2|x|}$ für $-\pi \le x \le \pi$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Lösen Sie das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ für } t \ge 0, \qquad u(x,0) = x\sin 5x \text{ für } 0 \le x \le \pi.$$

Abgabe der Lösungen spätestens am 03.12.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 8. Übung

Aufgabe 1. Es ist $f(x) = \frac{1}{3}f_1(x) + f_2(x)$ mit $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = 6\sin 2x$. Wir berechnen zunächst die Fourier-Koeffizienten der Funktion f_1. Diese ist ungerade bezüglich des Intervallmittelpunktes, und damit gilt hier $a_n(f_1) = 0$ für $n \geq 0$. Für die Fourier-Koeffizienten $b_n(f_1)$, $n \geq 1$, der Funktion f_1 berechnet man mit Hilfe dreifache partieller Integration Folgendes:

$$\begin{aligned}
b_n(f_1) &= \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi y^3 \sin ny\, dy = -\tfrac{2}{n\pi}\left(y^3 \cos ny\Big|_{y=0}^{y=\pi}\right) + \tfrac{6}{n\pi}\int_0^\pi y^2 \cos ny\, dy \\
&= -\tfrac{2\pi^2}{n}(-1)^n + \tfrac{6}{n^2\pi}\overbrace{\left(y^2 \sin ny\Big|_{y=0}^{y=\pi}\right)}^{=0} - \tfrac{12}{n^2\pi}\int_0^\pi y \sin ny\, dy \\
&= \tfrac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \tfrac{12}{\pi n^3}\left(y\cos ny\Big|_{y=0}^{y=\pi}\right) - \tfrac{12}{\pi n^3}\int_0^\pi \cos ny\, dy \\
&= \tfrac{2\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \tfrac{(-1)^n\cdot 12}{n^3} - \tfrac{12}{\pi n^4}\underbrace{\left(\sin ny\Big|_{y=0}^{y=\pi}\right)}_{=0} \\
&= \tfrac{(-1)^{n+1}(2\pi^2 n^2 - 12)}{n^3}, \quad n = 1, 2, \ldots\ .
\end{aligned}$$

Für die Fourier-Koeffizienten der Funktion f_2 ergibt sich durch Hinsehen $b_2(f_2) = 6$ und $b_n(f_2) = a_n(f_2) = 0$ für die restlichen Koeffizienten. Alternativ kann man die auch berechnen. Die Funktion f_2 ist ungerade bezüglich des Intervallmittelpunktes, und damit gilt hier $a_n(f_2) = 0$ für $n \geq 0$. Für die Fourier-Koeffizienten $b_n(f_2), n \geq 1$, der Funktion f_2 berechnet man mit Hilfe der Additionstheoreme Folgendes:

$$b_n(f_2) = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi 6\sin 2y \sin ny\, dy = \tfrac{6}{\pi}\int_0^\pi \cos((n-2)y) - \cos((n+2)y)\, dy.$$

Für $n \geq 1$ gilt $\int_0^\pi \cos((n+2)y)\, dy = \frac{\sin((n+2)y)}{n+2}\Big|_{y=0}^{y=\pi} = 0$. Analog erhalten wir für $n = 1$ und $n \geq 3$ $\int_0^\pi \cos((n-2)y)\, dy = \frac{\sin((n-2)y)}{n-2}\Big|_{y=0}^{y=\pi} = 0$. Für $n = 2$ gilt allerdings

$$b_2(f_2) = \tfrac{2}{\pi}\int_0^\pi 6\sin^2 2y\, dy = \tfrac{6}{\pi}\int_0^\pi 1 - \cos(4y)\, dy = \tfrac{6}{\pi}\left(y - \frac{\sin(4y)}{4}\right)\Big|_{y=0}^{y=\pi} = 6$$

Die Fourier-Koeffizienten der Funktion f erhält man nun durch Überlagerung. Es gilt damit

$$f(x) \sim 6\sin 2x + \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^{n+1}(\pi^2 n^2 - 6)}{n^3}\sin nx.$$

Aufgabe 2. Es ist $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ mit $f_1(x) = \frac{1}{2\pi}$ und $f_2(x) = -2e^{2|x|}$. Für die Fourier-Koeffizienten der Funktion f_1 ergibt sich durch Hinsehen $a_0(f_1) = \frac{1}{\pi}$ und $b_n(f_1) = a_n(f_1) = 0$ für $n \geq 1$. Wir betrachten des weiteren $f_2(x) = -2e^{2|x|}$. Für $x > 0$ gilt $-x < 0$ und damit $f_2(-x) = -2e^{2|-x|} = -2e^{2|x|} = f_2(x)$. Die betrachtete Funktion ist damit gerade. Gemäß Vorlesung gilt daher $b_n = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^{2y}\cos ny\, dy &= \frac{1}{n}\Big(\underbrace{e^{2y}\sin ny\Big|_{y=0}^{y=\pi}}_{=0} - 2\int_0^\pi e^{2y}\sin ny\, dy\Big) \\
&= \frac{2}{n^2}\Big(e^{2y}\cos ny\Big|_{y=0}^{y=\pi} - 2\int_0^\pi e^{2y}\cos ny\, dy\Big)
\end{aligned}$$

$$\text{d.h.} \qquad \int_0^\pi e^{2y}\cos ny\, dy = 2\frac{(-1)^n e^{2\pi} - 1}{n^2 + 4}.$$

Für $n \geq 1$ erhält man weiter

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -2e^{2|y|}\cos ny\,dy = -\frac{4}{\pi}\int_0^\pi e^{2y}\cos ny\,dy = \frac{8}{\pi}\frac{1+(-1)^{n+1}e^{2\pi}}{n^2+4}.$$

und außerdem gilt

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -2e^{2|y|}\,dy = -\frac{4}{\pi}\int_0^\pi e^{2y}\,dy = -\frac{2}{\pi}e^{2y}\Big|_{y=0}^{y=\pi} = \frac{2}{\pi}(1-e^{2\pi}).$$

Es gilt damit

$$f(x) \sim \frac{3-2e^{2\pi}}{2\pi} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1+(-1)^{n+1}e^{2\pi}}{n^2+4}\cos nx.$$

Aufgabe 3. Die Lösung ohne Beachtung der Anfangsbedingung ist gemäß Vorlesung von der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin(nx)e^{-n^2t} \text{ für } 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0 \qquad (*)$$

mit reellen Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots$, die an die Anfangsbedingung anzupassen sind. Gemäß Vorlesung gilt

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y\sin 5y \sin ny\,dy,\ n = 1,2,\ldots\ .$$

Für die Berechnung dieses Integrals verwenden wir das aus der Vorlesung bekannte Additionstheorem $\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(v-u) - \cos(v+u)),\ u,v \in \mathbb{R}$. Dies angewendet mit $u = 5y$ und $v = ny$ ergibt

$$y\sin 5y\sin ny = \tfrac{y}{2}\Big(\cos((n-5)y) - \cos((n+5)y)\Big), \quad y \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Daraus erhält man im Fall $n \neq 5$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi y\sin 5y\sin ny\,dy = \tfrac{y}{2}\left(\frac{\sin((n-5)y)}{n-5} - \frac{\sin((n+5)y)}{n+5}\right)\Big|_{y=0}^{y=\pi} - \frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{\sin((n-5)y)}{n-5} - \frac{\sin((n+5)y)}{n+5}\right)dy \\
&= \tfrac{y}{2}\left(\frac{\cos((n-5)y)}{(n-5)^2} - \frac{\cos((n+5)y)}{(n+5)^2}\right)\Big|_{y=0}^{y=\pi} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n-5)^2} - \frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+5)^2}\right) \\
&\quad = \frac{(-1)^{n+1}-1}{2(n+5)^2(n-5)^2}\Big((n+5)^2-(n-5)^2\Big) = -\frac{1+(-1)^n}{(n^2-25)^2}10n \\
&\quad = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade}, \\ -\dfrac{20n}{(n^2-25)^2}, & n \text{ gerade}, \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei $(-1)^{n\pm1} = -(-1)^n$ und $(n+5)(n-5) = n^2-25$ verwendet wurde.
Im Fall $n = 5$ liefert die Darstellung $(**)$ die Identität $\sin^2 5y = \frac{1}{2}(1-\cos 10y)$ und damit

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi y\sin^2 5y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\pi y(1-\cos 10y)\,dy = \left(\tfrac{1}{4}y^2 - \frac{y}{20}\sin 10y\right)\Big|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{20}\int_0^\pi \sin 10y\,dy \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \tfrac{1}{200}(\cos 10\pi - \cos 0) = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

Dies führt schließlich auf

$$b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade und } n \neq 5, \\ \frac{\pi}{2}, & n = 5, \\ -\dfrac{40}{\pi}\dfrac{n}{(n^2-25)^2}, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Die Identität $(*)$ nimmt damit folgende Form an:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{2}\sin(5x)e^{-25t} - \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(4n^2-25)^2}\sin(2nx)e^{-4n^2t} \text{ für } 0 \le x \le \pi,\ t \ge 0.$$