©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

6. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie unter Verwendung von Kugelkoordinaten das Volumen des Bereichs

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le \sqrt{x}, x \ge 0\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten den Schwerpunkt des homogenen Kreisringsegments

$$R = \{(x, y) \mid 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le x\sqrt{3}, x \ge 0\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie unter Verwendung elliptischer Zylinderkoordinaten das Volumen $\mu(K)$ des elliptischen Kegels $K \subseteq \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:

- die Achse des Kegels stimmt mit der y-Achse überein,
- die Spitze des Kegels zeigt in positive Richtung,
- der Kegel besitzt die Grundfläche $y = 0,\ a^2x^2 + b^2z^2 \le \rho^2$ und die Höhe h (der Abstand von Grundfläche zu Spitze).

Dabei sind a, b, ρ und h positive reelle Konstanten.

Abgabe der Lösungen spätestens am 19.11.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 6. Übung

Aufgabe 1. Wir betrachten hier die Kugelkoordinatendarstellung

$$x = r\cos\varphi\cos\delta, \quad y = r\sin\varphi\cos\delta, \quad z = r\sin\delta$$

mit $r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Die Bedingung $x^2+y^2+z^2 \leq \sqrt{x}$ bedeutet dann

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\cos^2\delta + r^2\sin^2\delta \leq \sqrt{r\cos\varphi\cos\delta} = \sqrt{x}$$

beziehungsweise umgestellt

$$r^2 = r^2(\cos^2\delta+\sin^2\delta) \leq (r\cos\varphi\cos\delta)^{1/2}$$

bzw nochmals umgestellt $r \leq \sqrt[3]{\cos\varphi\cos\delta}$. Es ist erforderlich als Bedingung $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ einzuführen. Mithilfe des Transformationssatzes erhält man

$$\begin{aligned}
\mu(D) &= \int_D 1\,d\vec{x} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt[3]{\cos\varphi\cos\delta}} r^2\cos\delta\,dr\,d\delta\,d\varphi \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\delta)\cdot\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos\varphi\cos\delta}}\right)d\delta\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\delta\,d\delta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi \\
&= \frac{1}{6}\left(\delta+\frac{1}{2}\sin 2\delta\Big|_{\delta=-\pi/2}^{\delta=\pi/2}\right)\left(\sin\varphi\Big|_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2}\right) = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Für das Kreisringsegment R gilt unter Verwendung von Polarkoordinaten die Darstellung $R = \{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \mid 2 \leq r \leq 3, -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3\}$. Für den Flächeninhalt $\mu(R)$ von R ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\mu(R) &= \int_R 1\,d\vec{x} = \int_2^3\int_{-\pi/6}^{\pi/3} r\,d\varphi\,dr = \int_2^3\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)r\,dr \\
&= \frac{\pi}{2}\int_2^3 r\,dr = \frac{\pi}{2}\frac{r^2}{2}\Big|_{r=2}^{r=3} = \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Für den Schwerpunkt $\vec{x}_S = (x_S, y_S) \in \mathbb{R}^2$ gilt daher

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{\mu(R)}\int_R x\,d\vec{x} = \frac{1}{\mu(R)}\int_2^3\int_{-\pi/6}^{\pi/3} r^2\cos\varphi\,d\varphi\,dr = \frac{1}{\mu(R)}\left(\int_2^3 r^2\,dr\right)\left(\int_{-\pi/6}^{\pi/3}\cos\varphi\,d\varphi\right) \\
&= \frac{1}{\mu(R)}\left(\frac{r^3}{3}\Big|_{r=2}^{r=3}\right)\left(\sin\varphi\Big|_{\varphi=-\pi/6}^{\varphi=\pi/3}\right) = \frac{1}{\mu(R)}\frac{19}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-(-\frac{1}{2})\right) \\
&= \frac{38(\sqrt{3}+1)}{15\pi} \simeq 2{,}203.
\end{aligned}$$

beziehungsweise analog

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{\mu(R)}\int_R y\,d\vec{x} = \frac{1}{\mu(R)}\int_2^3\int_{-\pi/6}^{\pi/3} r^2\sin\varphi\,d\varphi\,dr = \frac{1}{\mu(R)}\left(\int_2^3 r^2\,dr\right)\left(\int_{-\pi/6}^{\pi/3}\sin\varphi\,d\varphi\right) \\
&= -\frac{1}{\mu(R)}\frac{19}{3}\left(\cos\varphi\Big|_{\varphi=-\pi/6}^{\varphi=\pi/3}\right) = -\frac{1}{\mu(R)}\frac{19}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{38(\sqrt{3}-1)}{15\pi} \simeq 0{,}59.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Die Koordinatentransformation besitzt hier die Form

$$T(r,\varphi,y) = \left(\frac{r}{a}\cos\varphi, y, \frac{r}{b}\sin\varphi\right),$$

mit $y \in \mathbb{R},\ r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Sie ist stetig partiell differenzierbar, mit

$$\begin{aligned} T'(r,\varphi,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\cos\varphi & -\frac{r}{a}\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{b}\sin\varphi & \frac{r}{b}\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}, \\ \det T'(x,r,\varphi) &= -\tfrac{r}{ab}\sin^2\varphi - \tfrac{r}{ab}\cos^2\varphi = -\tfrac{r}{ab}. \end{aligned}$$

Die Determinante der Ableitungsmatrix $T'(r,\varphi,y)$ berechnet man z. B. durch Entwicklung nach der zweiten Zeile oder der zweiten Spalte.

Der Kegel K besitzt z. B. die Darstellung

$$\begin{aligned} K &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid\ 0 \leq y \leq h, \sqrt{a^2x^2+b^2z^2} \leq \rho(1-y/h)\Big\} \\ &= \Big\{(\tfrac{r}{a}\cos\varphi, y, \tfrac{r}{b}\sin\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid\ 0 \leq y \leq h,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq \rho(1-y/h)\Big\}. \end{aligned}$$

Mit der Notation $R(y) = \rho(1-y/h)$ für $0 \leq y \leq h$ erhält man folgendes:

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \textstyle\int_0^h \int_0^{R(y)} \int_0^{2\pi} \frac{r}{ab}\, d\varphi\, dr\, dy = \frac{2\pi}{ab} \int_0^h \int_0^{R(y)} r\, dr\, dy \\ &= \textstyle\frac{2\pi}{ab} \int_0^h \frac{r^2}{2}\Big|_{r=0}^{r=R(y)} dy = \frac{\pi}{ab}\rho^2 \int_0^h (1-y/h)^2\, dy \\ &= -\tfrac{2\pi}{ab}\rho^2 h \frac{(1-y/h)^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=h} = -\frac{\pi\rho^2 h}{3ab}\Big(\underbrace{(1-h/h)^3}_{=0} - 1\Big) = \frac{\pi\rho^2 h}{3ab}. \end{aligned}$$