©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

5. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie die Masse des Quaders

$$Q = \Big\{ (x, y, z) \mid e^2 \le x \le e^3, 1 \le y \le e, 1 \le z \le 3 \Big\},$$

wobei die Bezeichnung $e := \exp(1)$ verwendet wird, und die Massendichte sei durch

$$f(x, y, z) = \frac{z}{xy}, \qquad (x, y, z) \in Q,$$

gegeben.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Berechnen Sie das Volumen des Körpers $V \subseteq \mathbb{R}^3$, der von den beiden Paraboloiden $y = 4 - 3x^2 - 3z^2$ und $y = x^2 + z^2$ begrenzt wird.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie die z-Komponente des Schwerpunktes des homogenen Tetraeders, das durch die drei Koordinatenebenen und die Ebene $3x + 3y + 2z = 6$ berandet ist.

Abgabe der Lösungen spätestens am 12.11.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 5. Übung

Aufgabe 1. Die Masse m des Körpers Q berechnet sich z. B. so:

$$m = \int_1^3 \int_1^e \int_{e^2}^{e^3} \tfrac{z}{xy}\, dx\, dy\, dz = \int_1^3 \int_1^e \tfrac{z}{y} \ln x \Big|_{x=e^2}^{x=e^3} dy\, dz = (3-2) \int_1^3 \int_1^e \tfrac{z}{y}\, dy\, dz$$
$$= \int_1^3 z \ln y \Big|_{y=1}^{y=e} dz = \int_1^3 z\, dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=1}^{z=3} = \frac{1}{2}(9-1) = 4.$$

Dabei wurde von den Identitäten $\ln(e^n) = n$ und $\ln 1 = 0$ Gebrauch gemacht.

Aufgabe 2. Es gilt z. B.

$$V = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \le x \le 1,\ |z| \le \sqrt{1-x^2},\ x^2+z^2 \le y \le 4 - 3x^2 - 3z^2 \Big\}$$

und damit

$$\mu(V) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+z^2}^{4-3x^2-3z^2} 1\, dy\, dz\, dx \ = \ 4 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x^2 - z^2\, dz\, dx$$
$$= 2 \int_{-1}^1 \Big((1-x^2)z - \tfrac{z^3}{3} \Big) \Big|_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{z=\sqrt{1-x^2}} dx \ = \ 8 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\, dx$$
$$= \tfrac{16}{3} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{3/2}\, dx.$$

Zur Berechnung des letzten auftretenden Integrals führen wir die Substitution $x = \sin\eta$ durch. Wegen $dx = \cos d\eta$ und $\eta = \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$ erhält man

$$\mu(V) = \tfrac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\eta)^{3/2} \cos\eta\, d\eta \ = \ \tfrac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\eta \cos\eta\, d\eta \ = \ \tfrac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\eta\, d\eta.$$

Partielle Integration liefert mit $u'(\eta) = \cos\eta$ und $v(\eta) = \sin\eta$ Folgendes:

$$\int \cos^4\eta\, d\eta = \int \cos\eta \cos^3\eta\, d\eta \ = \ \sin\eta\cos^3\eta + 3 \int \sin^2\eta \cos^2\eta\, d\eta$$
$$= \sin\eta\cos^3\eta + 3 \int (1-\cos^2\eta)\cos^2\eta\, d\eta$$
$$= \sin\eta\cos^3\eta + 3 \int \cos^2\eta\, d\eta - 3 \int \cos^4\eta\, d\eta.$$

Eine Umstellung liefert

$$4 \int \cos^4\eta\, d\eta = \sin\eta\cos^3\eta + 3 \int \cos^2\eta\, d\eta$$

beziehungsweise

$$\int \cos^4\eta\, d\eta = \tfrac{1}{4} \sin\eta\cos^3\eta + \tfrac{3}{4} \int \cos^2\eta\, d\eta.$$

Aus der HM 1 ist die Identität

$$\int \cos^2\eta\, d\eta = \tfrac{1}{2}(\cos\eta\sin\eta + \eta) + c$$

bekannt, so dass wir insgesamt

$$\int \cos^4\eta\, d\eta = \tfrac{1}{4}\sin\eta\cos^3\eta + \tfrac{3}{8}\cos\eta\sin\eta + \tfrac{3}{8}\eta + c$$

erhalten. Wegen $\cos\frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ ergibt sich daraus

$$\mu(V) \ = \ \tfrac{16}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\eta\, d\eta \ = \ \tfrac{16}{3} \Big(0 + 0 + \tfrac{3}{8}\eta \Big|_{\eta=-\pi/2}^{\eta=\pi/2} \Big) \ = \ \tfrac{16}{3} \cdot \tfrac{3}{8}\pi \ = \ 2\pi.$$

Aufgabe 3. Das Tetraeder $T \subseteq \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T &= \Big\{(x,y,z) \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0,\, 3x + 3y + 2z \leq 6\Big\} \\ &= \Big\{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq 3,\, 0 \leq y \leq \frac{6-2z}{3},\, 0 \leq x \leq \frac{6-3y-2z}{3}\Big\}. \end{aligned}$$

Für das Volumen $\mu(T)$ des Tetraeders T ergibt sich damit Folgendes:

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \int_T 1 \, d\vec{x} = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2z}{3}} \int_0^{\frac{6-3y-2z}{3}} 1 \, dx \, dy \, dz = \tfrac{1}{3} \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2z}{3}} 6 - 3y - 2z \, dy \, dz \\ &= -\tfrac{1}{18} \int_0^2 (6-3y-2z)^2 \Big|_{y=0}^{y=\frac{6-2z}{3}} \, dz = \tfrac{1}{18} \int_0^3 (6-2z)^2 \, dz = \tfrac{2}{9} \int_0^3 (3-z)^2 \, dz = -\tfrac{2}{27}(3-z)^3 \Big|_{z=0}^{z=3} \\ &= \tfrac{2}{27} \cdot 27 = 2. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der z-Komponente des Schwerpunktes $\vec{x}_{\mathrm{S}} = (x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ von T berechnet man das folgende Integral:

$$\begin{aligned} \int_T z \, d\vec{x} &= \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2z}{3}} \int_0^{\frac{6-3y-2z}{3}} z \, dx \, dy \, dz = \tfrac{1}{3} \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2z}{3}} z(6-3y-2z) \, dy \, dz \\ &= -\tfrac{1}{18} \int_0^2 z(6-3y-2z)^2 \Big|_{y=0}^{y=\frac{6-2z}{3}} \, dz = \tfrac{1}{18} \int_0^3 z(6-2z)^2 \, dz = \tfrac{2}{9} \int_0^3 z(3-z)^2 \, dz \\ &= \tfrac{2}{9} \int_0^3 3(3-z)^2 - (3-z)^3 \, dz = -\tfrac{2}{9} \left((3-z)^3 - \frac{1}{4}(3-z)^4 \Big|_{z=0}^{z=3} \right) = \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{27}{4} = \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Das ergibt schließlich

$$z_s = \frac{3/2}{2} = \tfrac{3}{4}.$$