©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

4. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mu(A)$ des Bereiches

$$A = \Big\{ (x,y) \mid 0 \le y \le 4,\ 0 \le x \le \min y, 2 \Big\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Es sei der Bereich $A = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2,\ x \le y \le x^2\}$ mit einer Flächenladungsdichte $\sigma(x,y) = 6y - 2x$ für $(x,y) \in A$ belegt. Berechnen Sie die Gesamtladung Q auf A.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie das Volumen des Körpers

$$V = \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \le z \le 4,\ x^2 + y^2 \le z/2 \Big\}.$$

Verzichten Sie bei der Berechnung auf die Verwendung von Zylinderkoordinaten.

Abgabe der Lösungen spätestens am 05.11.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 4. Übung

Aufgabe 1. Es ist $A = A_1 \cup A_2$ mit

$$A_1 = \Big\{(x,y) \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le y\Big\}, \quad A_2 = \Big\{(x,y) \mid 2 \le y \le 4,\ 0 \le x \le 2\Big\}.$$

Wegen $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$ gilt $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Wir berechnen nun $\mu(A_1)$ und $\mu(A_2)$:

$$\mu(A_1) = \int_{A_1} 1\, d(x,y) = \int_0^2 \int_0^y 1\, dx\, dy = \int_0^2 y\, dy = \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=2} = \tfrac{1}{2}(4-0) = 2,$$
$$\mu(A_2) = \int_{A_2} 1\, d(x,y) = \int_0^2 \int_2^4 1\, dy\, dx = \int_0^2 2\, dx = 4.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2 + 4 = 6.$$

Aufgabe 2. Wir berechnen zunächst $\int_A 6y\, d(x,y)$ und $\int_A 2x\, d(x,y)$:

$$\begin{aligned}
\int_A 6y\, d(x,y) &= \int_1^2 \int_x^{x^2} 6y\, dy\, dx = \int_1^2 3y^2 \Big|_{y=x}^{y=x^2} dx \\
&= 3\int_1^2 x^4 - x^2\, dx = 3\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = 3\left(\frac{32-1}{5} - \frac{8-1}{3}\right) = \frac{58}{5}, \\
\int_A 2x\, d(x,y) &= \int_1^2 \int_x^{x^2} 2x\, dy\, dx = \int_1^2 2x(x^2 - x)\, dx = \int_1^2 2x^3 - 2x^2\, dx = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 \Big|_{x=1}^{x=2} \\
&= (8 - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{2}{3}(8-1) = \tfrac{45-28}{6} = \tfrac{17}{6}.
\end{aligned}$$

Für die Gesamtladung Q erhält man daraus

$$Q = \int_A 6y - 2x\, d(x,y) = \int_A 6y\, d(x,y) - \int_A 2x\, d(x,y) = \tfrac{58}{5} - \tfrac{17}{6} = \tfrac{348-85}{30} = \tfrac{263}{30}\ .$$

Mit der Einheit $[\,\sigma\,] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$ ergibt sich $[\,Q\,] = \mathrm{As}$.

Aufgabe 3. Hier berechnet man zunächst Folgendes:

$$\begin{aligned}
\mu(V) &= \int_2^4 \int_{-\sqrt{z/2}}^{\sqrt{z/2}} \int_{-\sqrt{z/2-y^2}}^{\sqrt{z/2-y^2}} 1\, dx\, dy\, dz = 2\int_2^4 \int_{-\sqrt{z/2}}^{\sqrt{z/2}} \sqrt{z/2 - y^2}\, dy\, dz \\
&= \sqrt{2}\int_2^4 \sqrt{y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{z}} \left(1 - \frac{2z^2}{y}\right)^{1/2} dy\, dz.
\end{aligned}$$

Mit der Identität

$$\int \sqrt{1 - \tfrac{y^2}{a^2}}\, dy = \tfrac{1}{2}\Big(y\sqrt{1 - \tfrac{y^2}{a^2}} + a \arcsin\left(\tfrac{y}{a}\right)\Big) + c \quad \text{für } -a \le z \le a \qquad (a > 0) \qquad (*)$$

erhält man daraus

$$\begin{aligned}
\mu(V) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int_2^4 \sqrt{z}\Big\{y\sqrt{1 - \tfrac{2y^2}{z}} + \sqrt{\tfrac{z}{2}} \arcsin\Big(y\sqrt{\tfrac{2}{z}}\Big)\Big\}\Big|_{y=-\sqrt{z/2}}^{y=\sqrt{z/2}} dy \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int_2^4 \sqrt{\tfrac{z}{2}}\Big\{0 - 0 + \sqrt{\tfrac{z}{2}}\Big(\arcsin(1) - \arcsin(-1)\Big)\Big\}\, dy \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\int_2^4 \tfrac{z}{2}\Big(\tfrac{\pi}{2} - \Big(-\tfrac{\pi}{2}\Big)\Big)\, dy = \tfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\int_2^4 z\, dz = \tfrac{\pi\sqrt{2}}{4} z^2\Big|_{z=2}^{z=4} = \tfrac{\pi\sqrt{2}}{4}(16-4) = 3\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Es wird nun noch die angegebene Identität $(*)$ für $\int \sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\,dy$ hergeleitet. Mit der Substitution $v = \frac{z}{a}$ für $-a \leq z \leq a$ erhält man mit $dz = a\,dv$ Folgendes:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\,dy = a\int\sqrt{1-v^2}\,dv &\overset{(**)}{=} \frac{a}{2}\Big(v\sqrt{1-v^2}+\arcsin v\Big)+c \\ &= \frac{a}{2}\Big(\frac{y}{a}\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}+\arcsin\left(\frac{z}{a}\right)\Big)+c = \frac{1}{2}\Big(y\sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}+a\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\Big)+c,\end{aligned}$$

wobei die Identität $(**)$ aus der Vorlesung bekannt ist. Das ist gerade die oben angegebene Identität $(*)$ für $\int \sqrt{1-\frac{y^2}{a^2}}\,dy$.