©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

3. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie für

$$F(x,y) = 4\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4},$$

das Kurvenintegral zweiter Art $\int_{\vec{\gamma}} F \cdot d\vec{s}$, wobei $\vec{\gamma}$ die durch $\vec{\gamma}$ parametrisierte orientierte Kurve bezeichnet. Tun Sie dies sowohl unter Verwendung der Definition dieses Integraltyps sowie mit Hilfe einer Stammfunktion.

Aufgabe 2 (5 Punkte (2+2+1)). Sei

$$F(x,y,z) = \frac{1}{x^2+z^2y^2}\begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix},$$

$$(x,y,z) \in D = \mathbb{R}^3 \setminus \Big\{ (x,y,z) \mid x = 0 \text{ und } (z = 0 \text{ oder } y = 0) \Big\}.$$

a) Überprüfen Sie die Integrabilitätsbedingungen.

b) Man berechne $\oint_C F$ für die folgenden beiden Fälle:

   i) C = orientierter Kreis mit Parametrisierung $\vec{\gamma}(t) = (\cos t, 1, \sin t)^\top$ für $0 \le t \le 2\pi$,

   ii) C = orientierter Kreis in der x-y-Ebene vom Radius 3 um den Punkt $(0,7,5)$.

c) Handelt es sich bei F um ein Potenzialfeld auf der Menge D?

Aufgabe 3 (3 Punkte (1,5+1,5)). Berechnen Sie folgende Integrale:

a) das Integral der Funktion $f(x,y) = \sin(x) - \cos(y)$ über das Rechteck $D = [0,\pi/2] \times [\pi/2,\pi]$,

b) das Integral der Funktion $f(x,y) = \sin(x+y)$ über das Rechteck $D = [0,\pi/2] \times [0,\pi]$.

Abgabe der Lösungen spätestens am 29.10.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 3. Übung

Aufgabe 1. Wir führen die Notationen

$$G(x,y) = 4\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

ein. Es ergibt sich hierfür

$$\begin{aligned}
\int_{\vec\gamma} G\cdot d\vec s &= \int_0^{\pi/4} G(\vec\gamma(t))\cdot\vec\gamma'(t)\,dt = 4\int_0^{\pi/4}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}dt\\
&= 4\int_0^{\pi/4}\cos^2 t-\sin^2 t\,dt \overset{(*)}{=} 4\sin t\cos t\Big|_0^{\pi/4} = 4\frac{1}{\sqrt2}\frac{1}{\sqrt2}=2,\\
\int_{\vec\gamma} H\cdot d\vec s &= \int_0^{\pi/4} H(\vec\gamma(t))\cdot\vec\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}dt = \int_0^{\pi/4}\cos t-2\sin t\,dt\\
&= \sin t+2\cos t\Big|_{t=0}^{t=\pi/4} = \left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{2}{\sqrt2}\right)-(0+2)=\frac{3}{\sqrt2}-2
\end{aligned}$$

wobei sich die Identität $(*)$ durch partielle Integration ergibt. Insgesamt erhält man

$$\int_{\vec\gamma} F\cdot d\vec s = \int_{\vec\gamma} G\cdot d\vec s + \int_{\vec\gamma} H\cdot d\vec s = 2+\frac{3}{\sqrt2}-2 = \frac{3}{\sqrt2}.$$

Es wird nun die Berechnung mit Hilfe einer Stammfunktion vorgenommen. Es ist

$$f(x,y) = 4xy + x + 2y$$

eine Stammfunktion des Vektorfeldes $F = G+H$, wie eine leichte Rechnung ergibt, und Anfangs- und Endpunkt der Kurve sind $(0,1)$ beziehungsweise $\frac{1}{\sqrt2}(1,1)$. Für das dazugehörigen Kurvenintegral ergibt sich damit

$$\int_{\vec\gamma} F\cdot d\vec s = \int_{(0,1)}^{\frac{1}{\sqrt2}(1,1)} F\cdot d\vec s = f\Big(\tfrac{1}{\sqrt2}(1,1)\Big) - f(0,1) = 2+\frac{3}{\sqrt2}-2 = \frac{3}{\sqrt2}.$$

Aufgabe 2. a) F ist ein Gradientenfeld ($\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, usw.).

b) i) Es gilt

$$\vec\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ 1\\ \sin t\end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec\gamma}(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ 0\\ \cos t\end{pmatrix},$$

$$F(\vec\gamma(t)) = \frac{1}{\cos^2 t+\sin^2 t}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}, \quad 0\le t\le 2\pi.$$

und damit

$$\begin{aligned}
\oint_C F &= \int_0^{2\pi} F(\vec\gamma(t))\cdot\dot{\vec\gamma}(t)dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ 0\\ \cos t\end{pmatrix}dt\\
&= \int_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{=1}dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

ii) Es ist z.B die offene Kugel B um den Punkt $(0,7,5)$ mit Radius 4 eine konvexe Menge, die die in diesem Teil betrachtete Kurve $\vec\gamma$ vollständig enthält und andererseits komplett in D enthalten ist. Da die Integrabilitätsbedingungen auf B (sogar auf D) erfüllt sind, besitzt F auf B ein Potenzial und daher gilt $\oint_C F = 0$.

c) Da es sich bei C in b) (i) um eine geschlossene Kurve handelt und das dazugehörige Kurvenintegral ungleich null ist, kann F kein Potenzial besitzen. Man beachte noch, dass das betrachtete Gebiet D nicht einfach zusammenhängend und damit das hinreichende Kriterium über die Existenz eines Potenzials nicht anwendbar ist.

Aufgabe 3. a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\pi/2]\times[\pi/2,\pi]} \sin(x) - \cos(y)\, d(x,y) &= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x) - \cos(y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x)\, dy\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(y)\, dx\, dy \\
&= \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx + \frac{\pi}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} (-\cos(y)) dy \\
&= \frac{\pi}{2} \left(cos(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \sin(y) \Big|_{y=\pi/2}^{y=\pi} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}((0-1) + (0-1)) = -\pi.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\pi/2]\times[0,\pi]} \sin(x+y)\, d(x,y) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \sin(x+y)\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} -\cos(x+y) \Big|_{y=0}^{y=\pi} dx \\
= \quad & - \int_0^{\pi/2} \cos(x+\pi) - \cos x\, dx = -\sin(x+\pi) \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \sin x \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} \\
&= -\left(\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) - \sin \pi \right) + \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin 0 \right) = -(-1-0) + 1 - 0 = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$