©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

2. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie den Schwerpunkt der homogen mit Masse belegten ebenen Kurve

$$\vec{\gamma} = \left\{ 2 \begin{pmatrix} -\sin^2 t \\ 1 + \sin t \cos t \end{pmatrix} \mid 0 \le t \le \pi \right\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Handelt es sich bei den Vektorfeldern

$$a)\ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 + yz \\ 2 + xz \\ 3 + xy \end{pmatrix}$$

$$b)\ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x\cos(xy) - x^2 y \sin(xy) \\ -x^3 \sin(xy) + z\cos(yz) \\ y\cos(yz) \end{pmatrix}$$

um Gradientenfelder? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Stammfunktionen.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y^2 e^{xy} \\ (1 + xy)e^{xy} \end{pmatrix}$$

entlang des Weges $C = C_1 + C_2$, wobei C_1 die Strecke von $(0, 0)$ nach $(0, 2)$ und C_2 die Strecke von $(0, 2)$ nach $(\ln(2), 3)$ bezeichnet. Tun Sie dies sowohl unter Verwendung der Definition dieses Integraltyps sowie mit Hilfe einer Stammfunktion.

Abgabe der Lösungen spätestens am 22.10.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 2. Übung

Aufgabe 1. Mit Hilfe der Produktregel der Differenziation erhält man Folgendes:

$$\vec{\gamma}'(t) = 2\begin{pmatrix} -2\sin t\cos t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} |\vec{\gamma}'(t)|^2 &= 4\left(4\sin^2 t\cos^2 t + \cos^4 t - 2\sin^2 t\cos^2 t + \sin^4 t\right) \\ &= 4(\cos^4 t + 2\sin^2 t\cos^2 t + \sin^4 t) = 4(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 = 4 \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$|\vec{\gamma}'(t)| \equiv 2.$$

Für Gesamtlänge $\mu(\vec{\gamma})$ und Schwerpunkt $\vec{x}_{\mathrm{S}} = (x_{\mathrm{S}}, y_{\mathrm{S}})$ erhält man daraus

$$\begin{aligned} \mu(\vec{\gamma}) &= \int_0^\pi |\vec{\gamma}'(t)|\,dt = \int_0^\pi 2\,dt = 2\pi, \\ x_{\mathrm{S}} &= \frac{1}{\mu(\vec{\gamma})}\int_0^\pi -2\sin^2 t\cdot|\vec{\gamma}'(t)|\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 4\sin^2 t\,dt = -\frac{1}{\pi}(t - \cos t\sin t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi}(\pi - 0) = -1, \\ y_{\mathrm{S}} &= \frac{1}{\mu(\vec{\gamma})}\int_0^\pi (2 + 2\sin t\cos t)\cdot|\vec{\gamma}'(t)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 4 + 4\sin t\cos t\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}(2t + \sin^2 t)\Big|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{1}{\pi}(2\pi - 0) = 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. a) Die gegebene Funktion F ist stetig partiell differenzierbar. Für die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) &= 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z), \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z), \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z). \end{aligned}$$

Es sind hier also alle Gleichungen aus dem notwendigen Kriterium für ein Gradientenfeld erfüllt. Wir berechnen nun eine Stammfunktion f:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \int F_1(x,y,z)\,dx = x + xyz + c_1(y,z), \\ f(x,y,z) &= \int F_2(x,y,z)\,dy = 2y + xyz + c_2(x,z), \\ f(x,y,z) &= \int F_3(x,y,z)\,dz = 3z + xyz + c_3(x,y). \end{aligned}$$

Ein Vergleich der rechten Seiten liefert das Ergebnis $f(x,y,z) = x + 2y + 3z + xyz + c$ mit einer Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$.

b) Diese Funktion F ist ebenfalls stetig partiell differenzierbar. Für die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen gilt hier

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) &= -3x^2\sin(xy) - x^3y\cos(xy) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z), \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) &= 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z), \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) &= \cos(yz) + yz\sin(yz) = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z). \end{aligned}$$

Es sind hier also alle Gleichungen aus dem notwendigen Kriterium für ein Gradientenfeld erfüllt. Wir berechnen nun eine Stammfunktion f:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \textstyle\int F_1(x,y,z)\,dx = x^2\cos(xy) + c_1(y,z),\\
f(x,y,z) &= \textstyle\int F_2(x,y,z)\,dy = x^2\cos(xy) + \sin(yz) + c_2(x,z),\\
f(x,y,z) &= \textstyle\int F_3(x,y,z)\,dz = \sin(yz) + c_3(x,y).
\end{aligned}$$

Ein Vergleich der rechten Seiten liefert das Ergebnis $f(x,y,z) = x^2\cos(xy) + \sin(yz) + c$ mit einer Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. Hier ist

$$\int_{\vec{\gamma}_1+\vec{\gamma}_2} F \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\gamma}_1} F \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{\gamma}_2} F \cdot d\vec{s}$$

mit

$$\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2, \qquad \vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} (t-2)\ln(2) \\ t \end{pmatrix}, \quad 2 \le t \le 3.$$

Es gilt

$$\vec{\gamma}_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2, \qquad \vec{\gamma}_2'(t) = \begin{pmatrix} \ln(2) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2 \le t \le 3,$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{\gamma}_1} F \cdot d\vec{s} &= \int_0^2 F(\vec{\gamma}_1(t)) \cdot \vec{\gamma}_1'(t)\,dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} t^2 e^{0\cdot t} \\ (1+0\cdot t)e^{0\cdot t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 1\,dt = t\Big|_{t=0}^{t=2} = 2-0 = 2,\\
\int_{\vec{\gamma}_2} F \cdot d\vec{s} &= \int_2^3 F(\vec{\gamma}_2(t)) \cdot \vec{\gamma}_2'(t)\,dt = \int_2^3 \begin{pmatrix} t^2 e^{\ln(2)\cdot t(t-2)} \\ (1+\ln(2)\cdot t(t-2))e^{\ln(2)\cdot t(t-2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(2) \\ 1 \end{pmatrix} dt\\
&= \int_2^3 \begin{pmatrix} t^2 2^{t(t-2)} \\ (1+\ln(2)\cdot t(t-2))2^{t(t-2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(2) \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 2^{t(t-2)} + t\cdot 2^{t(t-2)}\ln(2)(2t-2)\,dt\\
&= \int_2^3 \left(t\cdot 2^{t(t-2)}\right)'\,dt = t2^{t(t-2)}\Big|_{t=2}^{t=3} = 3\cdot 2^3 - 2\cdot 2^0 = 22.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $\int_{\vec{\gamma}} F \cdot d\vec{s} = 22 + 2 = 24$.

Für die Stammfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des Vektorfeldes F gilt

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \textstyle\int F_1(x,y)\,dx = ye^{xy} + c_1(y), \quad x,y \in \mathbb{R},\\
f(x,y) &= \textstyle\int F_2(x,y)\,dy = ye^{xy} + c_2(x), \quad x,y \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

und damit $f(x,y) = ye^{xy} + c$, $x,y \in \mathbb{R}$, mit einer Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$. Daraus erhält man

$$\int_{\vec{\gamma}} F \cdot d\vec{s} = \int_{(0,0)}^{(\ln(2),3)} F \cdot d\vec{s} = f(\ln(2),3) - f(0,0) = 3e^{\ln(2)\cdot 3} - 0e^0 = 3\cdot 2^3 - 0 = 24.$$