©Prof. Dr. R. Plato
A. Garanza, M. Sc.

UNIVERSITÄT SIEGEN

1. Übung zur Vorlesung *Höhere Mathematik 3*

Wintersemester 2019/20

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$\vec{\gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh 2t \\ 2t \end{pmatrix} \mid 0 \le t \le \ln 2 \right\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Berechnen Sie die Bogenlänge der Hypozykloide

$$\vec{\gamma} = \left\{ \vec{\gamma}(t) \mid 0 \le t \le 2\pi \right\} \text{ mit } \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin 3t - 3 \sin t \\ \cos 3t + 3 \cos t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 2\pi.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechnen Sie das Kurvenintegral erster Art der Funktion $f(x, y, z) = xyz \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$ über die spiralförmige räumliche Kurve

$$\vec{\gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} 2t\sqrt{2} \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \mid 0 \le t \le 2\pi \right\}.$$

Führen Sie bei jeder Aufgabe die notwendigen partiellen Integrationen und Substitutionen schriftlich aus.

Abgabe der Lösungen spätestens am 15.10.2019 (Dienstag) um 10.05 Uhr in der PB-Aula.

Lösungen zur 1. Übung

Aufgabe 1. Hier gilt

$$\vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 2\sinh 2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\left|\vec{\gamma}'\right|^2 = 4\sinh^2 2t + 4 = 4(\sinh^2 t + 1) = 4\cosh^2 2t.$$

Daraus ergibt sich Folgendes:

$$\mu(\vec{\gamma}) = \int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{4\cosh^2(2t)}\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\ln 2} 2\cosh(2t)\mathrm{d}t = \sinh(2t)\big|_{t=0}^{t=\ln 2} = \frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right)\Big|_{t=0}^{t=\ln 2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - (1-1)\right) = \frac{15}{8}.$$

Aufgabe 2. Hier gilt

$$\vec{\gamma}'(t) = 3\begin{pmatrix} \cos 3t - \cos t \\ -\sin 3t - \sin t \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned}
|\vec{\gamma}'(t)|^2 &= 9\Big((\cos 3t - \cos t)^2 + (\sin 3t + \sin t)^2\Big) \\
&= 9\Big(\cos^2 3t - 2\cos t\cos 3t + \cos^2 t + \sin^2 3t + 2\sin t\sin 3t + \sin^2 t\Big) \\
&\overset{(*)}{=} 9\Big(1 + 1 - 2\Big(\cos t\cos 3t - \sin t\sin 3t\Big)\Big) \overset{(**)}{=} 18(1 - \cos 4t) \\
&\overset{(***)}{=} 36\sin^2 2t.
\end{aligned}$$

Dabei ist in $(*)$ von der Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ Gebrauch gemacht worden, und zwar einmal mit $x = t$ und einmal mit $x = 3t$. In $(**)$ ist das Additionstheorem $\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x+y)$ mit $x = t$ und $y = 3t$ verwendet worden. Das gleiche Additionstheorem mit $x = y = \frac{t}{2}$ liefert $\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2} = \cos^2\frac{t}{2} + \sin^2\frac{t}{2} - 2\sin^2\frac{t}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$ beziehungsweise $(***)$. Die gesuchte Bogenlänge der betrachteten Hypozykloide ist damit

$$\begin{aligned}
\mu(\vec{\gamma}) &= \int_0^{2\pi} |\vec{\gamma}'(t)|\,dt = 6\int_0^{2\pi} \Big|\sin 2t\Big|\,dt \\
&\overset{(*)}{=} 6\Big(\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin 2t\,dt + \int_{\pi}^{3\pi/2}\sin 2t\,dt - \int_{3\pi/2}^{2\pi}\sin 2t\,dt\Big) \\
&= 3\Big(-\cos 2t\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} + \cos 2t\Big|_{t=\pi/2}^{t=\pi} - \cos 2t\Big|_{t=\pi}^{t=3\pi/2} + \cos 2t\Big|_{t=3\pi/2}^{t=2\pi}\Big) \\
&= 3(2+2+2+2) = 24.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Hier gilt

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t\sqrt{2} \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$$

und damit $|\vec{\gamma}'(t)|^2 = 8 + 4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t \equiv 12$ beziehungsweise $|\vec{\gamma}'(t)| \equiv 2\sqrt{3}$. Daraus ergibt sich Folgendes:

$$\int_{\vec{\gamma}} f\,ds = \int_0^{2\pi} f(\vec{\gamma}(t))|\vec{\gamma}'(t)|\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{2}\cos 2t\sin 2t\,dt = 4\sqrt{6}\int_0^{2\pi} t\cos 2t\sin 2t\,dt.$$

Wir berechnen das dazugehörige unbestimmte Integral mittels partieller Integration:

$$\int \underbrace{t}_{u}\underbrace{\cos 2t\sin 2t}_{v'}\,dt = \tfrac{1}{4}t\sin^2 2t - \tfrac{1}{4}\int \sin^2 2t\,dt = \tfrac{1}{2}t\sin^2 t - \tfrac{1}{16}\Big(2t - \cos 2t\sin 2t\Big) + c,$$

wobei $v(t) = \frac{1}{4}\sin^2 2t$ verwendet wurde, was sich durch genaues Hinsehen oder erneute partielle Integration ergibt. Die verwendete Darstellung für $\int \sin^2 2t\,dt$ erhält man ebenfalls durch partielle Integration.

Wir erhalten damit

$$\int_{\vec{\gamma}} f\,ds = 4\sqrt{6}\Big(\tfrac{1}{4}t\sin^2 2t - \tfrac{1}{16}(2t - \cos 2t\sin 2t)\Big)\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \sqrt{6}\Big(0 - \tfrac{1}{4}(4\pi + 0)\Big) = -\pi\sqrt{6}.$$