

dass sich die Flussintegrale über innere Randflächen gegenseitig wegheben: was aus einem Quader nach innen in Richtung eines benachbarten Quaders abfließt, wird von diesem aufgenommen. Die Situation ist für den ebenen Fall  $d = 2$  in Abbildung 173 dargestellt.

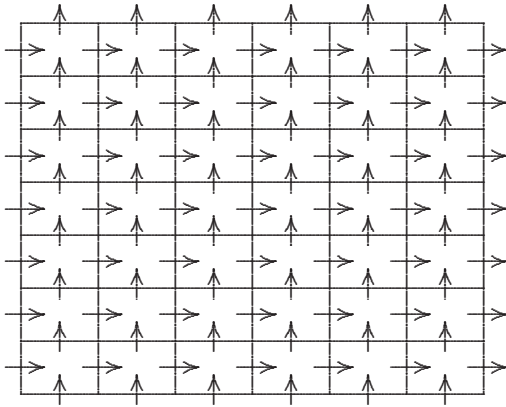


Abb. 173: Illustration zum gaußschen Integralsatz  $\Delta$

**Bemerkung.** Wir betrachten nun kurz die Strömung eines kompressiblen Fluids in  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$  mit dem zeitabhängigen Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^d$  und Dichtefunktion  $\varrho(\vec{x}, t) \geq 0$  für  $\vec{x} \in \mathcal{D}, t \geq 0$ . Wir nehmen an, dass in dem betrachteten Gebiet weder Quellen noch Senken auftreten. In diesem Fall genügen Geschwindigkeitsfeld und Dichtefunktion der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \operatorname{div}(\varrho \vec{v})(\vec{x}, t) = 0 \text{ für } \vec{x} \in \mathcal{D}, t \geq 0. \quad (91.6)$$

Dabei wirkt die Divergenz lediglich auf den Raumvariablen. Die partielle Differentialgleichung (91.6) wird als *Kontinuitätsgleichung* bezeichnet. In der Elektrotechnik entspricht  $\varrho$  der Ladungsdichte und  $\varrho \vec{v}$  der Stromdichte  $\vec{j}$ .  $\Delta$

### 91.3 Anmerkungen zu dem Randintegral $\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$ im gaußschen Integralsatz

Wir starten mit zwei Anmerkungen zur mathematischen Einordnung der im gaußschen Integralsatz auftretenden Randintegrale.

**Bemerkung** (Analogie der Randintegrale in Satz 91.3). Das Kurvenintegral  $\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$  aus Teil a) von Satz 91.3 stellt das zweidimensionale Analogon zum Oberflächenintegral  $\int_{\mathcal{A}} \vec{u} \cdot d\vec{\sigma}$  aus Teil b) dar. Im Gegensatz zu

dem Oberflächenintegral ist für dieses Kurvenintegral jedoch keine eigene Notation eingeführt worden, was die explizite Verwendung von Normalenvektoren erforderlich macht.  $\Delta$

**Bemerkung** (Vergleich Kurven-/Arbeitsintegral). Das Kurvenintegral  $\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$  aus Teil a) von Satz 91.3 ist nicht zu verwechseln mit dem hier bedeutungslosen Arbeitsintegral  $\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$ . Während man bei dem ersten Integraltyp über den Anteil des Vektorfeldes integriert, der *senkrecht* zur betrachteten Kurve verläuft, wird bei dem zweiten Integral über denjenigen Anteil des Vektorfeldes integriert, der *tangential* zur betrachteten Kurve verläuft.  $\Delta$

Die Parametrisierung  $\vec{\gamma}$  der Randkurve  $\mathcal{C}$  kann zur Darstellung des Normalenvektors  $\vec{n}$  verwendet werden, was dann eine andere Darstellung des Kurvenintegrals  $\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds$  ermöglicht. Details dazu liefert die folgende Proposition.

**Proposition 91.4.** Sei  $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung einer Kurve  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^2$  mit  $\vec{\gamma}'(t) \neq \vec{0}$  für  $t \in [a, b]$ . Die Parametrisierung sei dabei so gewählt, dass  $\mathcal{C}$  entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werde. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds = \int_a^b u_1(\vec{\gamma}(t))\gamma_2'(t) - u_2(\vec{\gamma}(t))\gamma_1'(t) \, dt. \quad (91.7)$$

**BEWEIS.** Bei der vorliegenden Wahl des Kurvendurchlaufs ist eine Parametrisierung des nach außen zeigenden Normalenvektors an die Kurve durch

$$\vec{n}(\vec{\gamma}(t)) = \frac{1}{|\vec{\gamma}'(t)|} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}, \quad a \leq t \leq b,$$

gegeben. Damit erhält man aus Definition 69.3 auf Seite 189 Folgendes:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot \vec{n} \, ds &= \int_a^b (u_1 n_1 + u_2 n_2)(\vec{\gamma}(t)) |\vec{\gamma}'(t)| \, dt \\ &= \int_a^b u_1(\vec{\gamma}(t))\gamma_2'(t) - u_2(\vec{\gamma}(t))\gamma_1'(t) \, dt. \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Bei einem entgegengesetzten Durchlauf von  $\mathcal{C}$  (dann im Uhrzeigersinn) gilt die Identität (91.7) mit negativem Vorzeichen auf der rechten Seite.

### 91.4 Volumen- und Flächenberechnungen mit Hilfe des gaußschen Integralsatzes

Der gaußsche Integralsatz ermöglicht die Berechnung von Flächeninhalten und Volumina mit Hilfe von Randintegralen:

**Korollar 91.5.** Es sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$  ein zulässiger Integrationsbereich, mit  $d = 2$  oder  $d = 3$ .

a) Im Fall  $d = 2$  gelten die folgenden drei Darstellungen für den Flächeninhalt von  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} x n_1(x, y) + y n_2(x, y) ds \\ &= \int_{\mathcal{C}} x n_1(x, y) ds = \int_{\mathcal{C}} y n_2(x, y) ds, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{C}$  die Randkurve von  $\mathcal{D}$  sei und  $\vec{n} = \vec{n}(x, y)$  den äußeren Normalenvektor zu  $\mathcal{C}$  bezeichne.

b) Im Fall  $d = 3$  gilt

$$\mu(\mathcal{D}) = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{A}} \vec{x} \cdot d\vec{\sigma},$$

wobei  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  die Randfläche von  $\mathcal{D}$  bezeichne.

**BEWEIS.** Teil a) folgt direkt aus Satz 91.3 auf Seite 257 angewendet mit  $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}$  beziehungsweise  $\vec{u}(x, y) = (x, 0)^\top$  beziehungsweise  $\vec{u}(x, y) = (0, y)^\top$ . Teil b) folgt aus Satz 91.3 angewendet mit  $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{x}$ .  $\square$

Es existieren zu Teil b) des eben vorgestellten Korollars Varianten, die ähnlich zu den Varianten in Teil a) sind.

Im ebenen Fall  $d = 2$  ergeben die drei Varianten von Teil a) des gerade vorgestellten Korollars zusammen mit Proposition 91.4 auf der vorherigen Seite über die parametrisierte Form des Randintegrals Folgendes:

**Korollar 91.6.** In der Situation von Proposition 91.4 auf der vorherigen Seite erhält man

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \frac{1}{2} \int_a^b \gamma_1(t) \gamma_2'(t) - \gamma_2(t) \gamma_1'(t) dt \\ &= \int_a^b \gamma_1(t) \gamma_2'(t) dt = - \int_a^b \gamma_2(t) \gamma_1'(t) dt. \end{aligned}$$

**Beispiel.** Wir berechnen im Folgenden den Inhalt der von der Kardioide

$$\mathcal{C} = \{ \vec{\gamma}(t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi \}$$

$$\text{mit } \vec{\gamma}(t) = R \begin{pmatrix} 2 \cos t - \cos 2t \\ 2 \sin t - \sin 2t \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq 2\pi$$

eingeschlossenen Fläche  $\mathcal{D}$ , wobei die Kurve das Innere entgegen dem Uhrzeigersinn durchläuft, und ist  $R > 0$  eine Konstante. Die Situation ist in Abbildung 174 illustriert.

Es gilt daher

$$\mu(\mathcal{D}) = - \int_0^{2\pi} \gamma_2(t) \gamma_1'(t) dt.$$

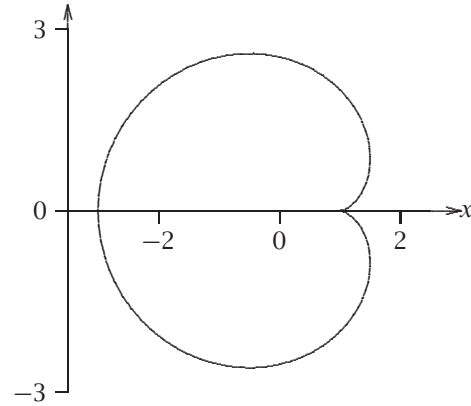


Abb. 174: Kardioide

Für den Integranden gilt

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) \gamma_1'(t) &= 2R^2 (2 \sin t - \sin 2t) (\sin 2t - \sin t) \\ &= 2R^2 (3 \sin t \sin 2t - 2 \sin^2 t - \sin^2 2t). \end{aligned}$$

Für die Integrale der Summanden erhält man Folgendes:

$$\begin{aligned} 3 \int_0^{2\pi} \sin t \sin 2t dt &= \frac{3}{2} \left( \sin t - \frac{\sin 3t}{3} \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 0, \\ 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt &= \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi, \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \sin^2 \tau d\tau = \pi. \end{aligned}$$

Daraus erhält man schließlich

$$\mu(\mathcal{D}) = 2R^2(0 + 2\pi + \pi) = 6\pi R^2. \quad \triangle$$

## 92 Rotation rot, und Satz von Stokes

### 92.1 Rotation rot

**Definition 92.1.** Für ein differenzierbares Vektorfeld  $\vec{u} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$  bezeichnet

$$\text{rot } \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (92.1)$$

die *Rotation* des Vektorfeldes  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ . In (92.1) bezeichnen  $x, y, z$  die Veränderlichen.  $\triangle$

Wir stellen einige weitere übliche Bezeichnungen vor: