**Definition 90.2.** Gegeben sei eine Fläche $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit einer Parametrisierung gemäß (88.1) auf Seite 248. Es heißt ein Vektor $\vec{n} = \vec{n}(x) \in \mathbb{R}^3$ *Normalenvektor an die Fläche* $\mathcal{A}$ *im Punkt* $\vec{x} = T(\vec{\alpha}) \in T(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{A}$,

- falls der Vektor $\vec{n}$ im Punkt $\vec{x} \in \mathcal{A}$ senkrecht auf der Tangentialfläche an $\mathcal{A}$ steht, d. h.

$$\vec{n} \perp \frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}), \qquad \vec{n} \perp \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha}),$$

  wobei die Notation $\vec{\alpha} = (\xi, \eta)$ verwendet wird,
- und falls $\vec{n}$ darüber hinaus normiert ist, $|\vec{n}| = 1$. △

Die Berechnung von Normalenvektoren $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ ist leicht mit Hilfe des Kreuzproduktes möglich:

$$\vec{n}(\vec{x}) = \pm \frac{\frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha})}{|\frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha})|}, \quad \vec{x} = T(\vec{\alpha}),\ \vec{\alpha} = (\xi, \eta) \in \mathcal{D}', \tag{90.3}$$

wobei das Vorzeichen in (90.3) frei wählbar ist. Es wird jedoch für alle Punkte $\vec{x} \in \mathcal{A}$ einheitlich gewählt und legt die Orientierung der Fläche $\mathcal{A}$ fest.

**Definition 90.3** (Orientierung der Fläche). Per Definition liegt die positive Seite von $\mathcal{A}$ auf derjenigen Seite, die in Richtung des gewählten Normalenvektors liegt.

## 90.4 Fortsetzung des Beispiels: beliebige Flächen

Im Folgenden sei $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit Parametrisierung $T : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ und

$$\vec{u} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^3$$

das stationäre Geschwindigkeitsfeld eines strömenden Fluids. Wir leiten im Folgenden eine Formel her, die das durch die Fläche pro Zeiteinheit in positiver Richtung fließende Gesamtvolumen des Fluids angibt. Dabei werden entgegengesetzte Ströme gegeneinander aufgerechnet, das Resultat ist daher ein Nettogesamtvolumen. Es ist positiv, wenn mehr in positive als in negative Richtung durch die Fläche $\mathcal{A}$ fließt.

Für die Herleitung dieser Formel betrachten wir eine Zerlegung $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}'$ gemäß Definition 74.5 auf Seite 215, d. h.

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_n = \mathcal{D}',$$
$$\mathcal{D}_k^\circ \cap \mathcal{D}_j^\circ = \varnothing \text{ für } k, j = 1, 2, \ldots, n,\ k \neq j,$$

mit kleiner Feinheit und betrachten dazu

$$T(\mathcal{D}_k) =: \mathcal{A}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Weiter wählen wir Gitterpunkte

$$\vec{x}_k \in \mathcal{A}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Wir betrachten nun für ein festen Index $k$ die Situation auf der Teilfläche $\mathcal{A}_k$. Bei feiner Zerlegung können wir nun Folgendes annehmen:

- es ist die Teilfläche $\mathcal{A}_k$ nahezu eben, mit einem konstantem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x}_k)$,
- es ist das Geschwindigkeitsfeld auf $\mathcal{A}_k$ nahezu konstant gleich $\vec{u}(\vec{x}_k)$.

Das durch die Teilfläche $\mathcal{A}_k$ pro Zeiteinheit in positiver Richtung fließende Gesamtvolumen des betrachteten Fluids ist damit nach den Überlegungen in Abschnitt 90.2.2 ungefähr gleich $\vec{u}(\vec{x}_k) \cdot \vec{n}(\vec{x}_k)\mu(\mathcal{A}_k)$. Summation über $k = 1, 2, \ldots, n$ ergibt damit eine Näherung für das durch die gesamte Fläche $\mathcal{A}_k$ pro Zeiteinheit in positiver Richtung fließende Gesamtvolumen des betrachteten Fluids. Diese Summe ist aber zugleich eine riemannsche Summe:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{u}(\vec{x}_k) \cdot \vec{n}(\vec{x}_k)\mu(\mathcal{A}_k) \approx \int_{\mathcal{A}} \vec{u} \cdot \vec{n}\, d\sigma \in \mathbb{R}, \tag{90.4}$$

wobei die Approximation umso besser ausfallen wird, je feiner die Zerlegung gewählt wird. Diese Überlegungen zeigen, dass das angegebene Integral in (90.4) das Nettogesamtvolumen des durch die Fläche $\mathcal{A}$ pro Zeitintervall strömenden Fluids angibt.

## 90.5 Definition des Flächenintegrals zweiter Art

**Definition 90.4** (Flächenintegral zweiter Art). Mit den Bezeichnungen aus (88.1) auf Seite 248 ist das Integral einer stetigen vektorwertigen Funktion $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^3$ über eine orientierte Fläche $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ durch

$$\int_{\mathcal{A}} F \cdot d\vec{\sigma} := \int_{\mathcal{A}} F \cdot \vec{n}\, d\sigma \in \mathbb{R}. \tag{90.5}$$

Hierbei bezeichnet das auf der rechten Seite der Gleichung verwendete Symbol «·» das euklidische Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$, und der Normalenvektor wird entsprechend Definition 90.2 gewählt. △

**Bemerkung 90.5.** Ausgehend von den Notationen in Definition 90.4 liefert ein Vergleich mit Definition 89.1

auf Seite 250 unter Verwendung der Darstellung (90.3) des Normalenvektors die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}} F \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{A}} F \cdot \vec{n}\, d\sigma \\
&= \pm \int_{\mathcal{D}} F(T(\vec{\alpha})) \cdot \frac{\frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha})}{\cancel{\left| \frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \right|}} \cancel{\left| \frac{\partial T}{\partial x}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \right|}\, d\vec{\alpha} \\
&= \pm \int_{\mathcal{D}} F(T(\vec{\alpha})) \cdot \big( \tfrac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \tfrac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \big)\, d\vec{\alpha}.
\end{aligned}$$

$\triangle$

**Beispiel.** Wir berechnen das Integral $\int_{\mathcal{A}} F \cdot d\vec{\sigma}$ für die Halbkugeloberfläche ohne Boden,

$$\mathcal{A} = \big\{ \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \ge 0 \big\}$$

und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x, 0, 0)$ für $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathcal{A}$ mit der Flächenorientierung $\vec{n}(\vec{x}) = \vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathcal{A}$; es wird also der äußere Normalenvektor verwendet. Wir betrachten hierzu die Kugelkoordinatentransformation

$$T(\varphi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\delta \\ \sin\varphi \cos\delta \\ \sin\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{90.6}$$

aus Beispiel 89.4 auf Seite 251 für die Werte $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $0 \le \delta \le \frac{\pi}{2}$ (hier sind also nur nichtnegative Werte für $\delta$ zugelassen). Dann gilt

$$T(\mathcal{D}) = \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{D} = [0, 2\pi] \times [0, \tfrac{\pi}{2}],$$

und diese Transformation besitzt die in (88.1) auf Seite 248 geforderten Eigenschaften.

Wegen $F(\vec{x}) \cdot \vec{x} = x^2$ für $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathcal{A}$ erhält man mit Hilfe von Beispiel 89.4 auf Seite 251 sowie Bemerkung 90.5 mit der Notation $\vec{\alpha} = (\varphi, \delta)$ das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{A}} F \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{D}} F(T(\vec{\alpha})) \cdot \big( \tfrac{\partial T}{\partial \varphi}(\vec{\alpha}) \times \tfrac{\partial T}{\partial \delta}(\vec{\alpha}) \big)\, d\vec{\alpha} \\
&= \int_{\mathcal{D}} (\cos\delta) F(T(\vec{\alpha})) \cdot T(\vec{\alpha})\, d\vec{\alpha} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cos^3\delta\, d\delta\, d\varphi \\
&= \Big( \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \Big) \cdot \Big( \int_0^{\pi/2} \cos^3\delta\, d\delta \Big) \\
&= \tfrac{1}{2} \Big( \sin\varphi \cos\varphi + \varphi \Big|_0^{2\pi} \Big) \cdot \Big( \sin\delta - \tfrac{1}{3} \sin^3\delta \Big|_0^{\pi/2} \Big) \\
&= \pi \cdot (1 - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Dabei erhält man die angegebene Stammfunktion für $\cos^3\delta$ leicht durch einmalige partielle Integration und zweimalige Anwendung der Formel $\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$.

$\triangle$

# 91 Divergenz div und gaußscher Integralsatz

## 91.1 Divergenz div

**Definition 91.1.** Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{u} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichnet

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial u_d}{\partial x_d} : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \qquad (91.1)$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$. In (91.1) bezeichnen $x_1, x_2, \ldots, x_d$ die Veränderlichen. $\triangle$

Es wird der Wert $\operatorname{div} \vec{u}(\vec{x})$ auch als *Quellstärke* oder *Quelldichte* bezeichnet. Im Fall $\operatorname{div} \vec{u} \equiv 0$ nennt man das Vektorfeld *quellfrei*. Hintergründe werden in der folgenden Bemerkung erläutert.

Typische Anwendungen, in denen die Divergenz eine Rolle spielt, sind Geschwindigkeitsfelder $\vec{u} = \vec{v}$ eines Fluids in $\mathbb{R}^2$ (ebene Strömung) oder $\mathbb{R}^3$ oder der daraus resultierende Massestrom $\vec{u} = \varrho\vec{v}$, wobei $\varrho$ eine stationäre Dichtefunktion bezeichnet. Das Analogon in der Elektrotechnik erhält man mit der Stromdichte $\vec{u} = \vec{j} = \varrho\vec{v}$.

**Beispiel.** Vektorfelder, bei denen die $k$-te Komponente nicht von der Variablen $x_k$ abhängt, z. B.

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{c} \text{ in } \mathbb{R}^d, \qquad \vec{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

sind zwei einfache Beispiele für quellfreie Vektorfelder. $\triangle$

**Bemerkung 91.2.** Im Folgenden wird für ein stationäres inkompressibles Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^3$ eines Fluids in $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ betrachtet.gerechtfertigt ist. Es stellt sich dabei heraus, dass $\operatorname{div} \vec{u}$ als Maß für die lokale Änderung des Fluidvolumens pro Zeiteinheit verwendet werden kann und damit die oben eingeführte Bezeichnung «Quelldichte» für diesen Wert gerechtfertigt ist. Ein solche vorzeichenbehaftete Volumenänderung wird typischerweise durch Quellen und Senken verursacht.

Dazu wird für einen Punkt $\vec{x} \in \mathcal{D}$ eine Umgebung in Form eines kleinen Parallelotops herangezogen, welches parallel zu den Koordinatenachsen verlaufende Kanten der jeweiligen Länge $\Delta x$, $\Delta y$ und $\Delta z$ besitze. Der Punkt $\vec{x} = (x, y, z)$ bilde den Mittelpunkt des Parallelotops. Die vorliegende Situation ist in Abbildung 172 dargestellt.

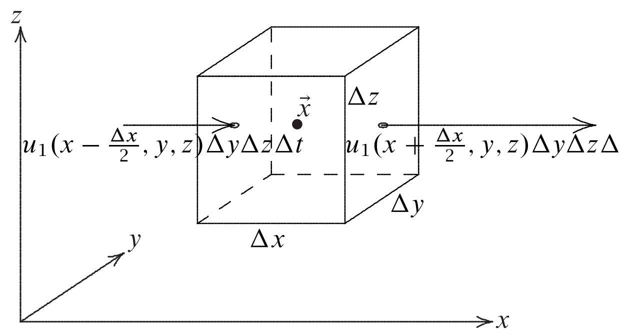


Abb. 172: Fluss durch kleines Parallelotop

Zur Vereinfachung der nachfolgenden Betrachtungen sei noch angenommen, dass alle auftretenden Geschwindigkeiten und deren betrachteten Ortsableitungen positiv sind.

Als Erstes soll dasjenige Fluidvolumen ermittelt werden, das in einem Zeitintervall der Dauer $\Delta t$ durch diejenige Seitenfläche des Parallelotops einströmt, die den Punkt $(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \in \mathcal{D}$ als Mittelpunkt besitzt und die parallel zur $y$-$z$-Ebene verläuft. In Abb. 172 handelt es sich dabei um die linksseitige Begrenzungsfläche des Parallelotops. Dieses einströmende Volumen beträgt näherungsweise

$$\begin{aligned} & u_1(x - \frac{\Delta x}{2} x, y, z)\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t \\ & \qquad \approx \big(u_1(\vec{x}) - \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x}) \Delta x\big)\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t. \end{aligned} \qquad (91.2)$$

Ähnlich berechnet man dasjenige Volumen, das in einem Zeitintervall der Dauer $\Delta t$ durch diejenige Fläche ausströmt, die durch den Punkt $(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)$ läuft und parallel zu der eben betrachteten Fläche ist. Das durch diese Begrenzungsfläche ausströmende Volumen beträgt näherungsweise

$$\begin{aligned} & u_1(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z)\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t \\ & \qquad \approx \big(u_1(\vec{x}) + \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x}) \Delta x\big)\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t. \end{aligned} \qquad (91.3)$$

Subtraktion der Approximation für das betrachtete einströmende Volumen (siehe (91.2)) von der Approximation des ausströmenden Volumens (siehe (91.3)) ergibt

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(\vec{x})\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \Delta t. \qquad (91.4)$$

Das ist die durch das ein- beziehungsweise ausströmende Fluid durch die beiden betrachteten Flächen verursachte Volumenänderung.

Ähnlich verfährt man mit den anderen Begrenzungsflächen und erhält so einen Ausdruck für die Volumenänderung im Zeitintervall der Dauer $\Delta t$ in dem betrachteten Parallelotop:

$$\underbrace{\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\Big)}_{=\operatorname{div}\vec{u}}(\vec{x})\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t. \tag{91.5}$$

Eine abschließende Division durch $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\Delta t$ liefert $\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x})$ – ein Maß für die Änderung des Fluidvolumens pro Volumen- und Zeiteinheit im Punkt $\vec{x}$. △

## 91.2 Gaußscher Integralsatz

Das folgende Theorem liefert eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung (siehe Satz 45.7 auf Seite 124) auf Vektorfelder von zwei beziehungsweise drei Veränderlichen:

**Satz 91.3** (Gaußscher Integralsatz). *Es sei $\vec{u}:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit offenen beschränktem Definitionsbereich $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^d$, wobei $d=2$ oder $d=3$ gelte.*

a) *Im Fall $d=2$ gilt*

$$\int_{\mathcal{D}}\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x})\,d\vec{x}=\int_{\mathcal{C}}\vec{u}\cdot\vec{n}\,ds,$$

*wobei $\mathcal{C}=\partial\mathcal{D}$ eine stückweise glatte Randkurve des ebenen Bereichs $\mathcal{D}$ sei und $\vec{n}=\vec{n}(x,y)$ den äußeren Normalenvektor zu $\mathcal{C}$ bezeichnet.*

b) *Im Fall $d=3$ gilt*

$$\int_{\mathcal{D}}\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x})\,d\vec{x}=\int_{\mathcal{A}}\vec{u}\cdot d\vec{\sigma},$$

*wobei $\mathcal{A}\subseteq\mathbb{R}^3$ die Randfläche des räumlichen Bereichs $\mathcal{D}$ bezeichne. Dabei sei $\mathcal{A}$ so orientiert, dass die positive Seite von $\mathcal{A}$ außen liege.*

Mögliche Anwendungsbereiche des gaußschen Integralsatz sind:

- Bestimmung des Flussen eines Fluids oder Ladungstransports durch die möglicherweise komplizierte Randkurve (ebener Fall $d=2$) beziehungsweise Randfläche (räumlicher Fall $d=3$) von $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^d$ mit Hilfe des Integrals der Divergenz des Vektorfeldes über $\mathcal{D}$;
- Anwendungen in logisch umgekehrter Richtung sind ebenfalls möglich: das Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über eine Menge $\mathcal{D}$ lässt sich unter Umständen einfacher über den Fluss des Vektorfeldes durch die Randkurve (ebener Fall $d=2$) beziehungsweise Randfläche (räumlicher Fall $d=3$) von $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^d$ berechnen;
- Berechnung des Flächeninhalts (Fall $d=2$) oder des Volumens (Fall $d=3$) von $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^d$. Details dazu finden Sie in Abschnitt 91.4 auf der nächsten Seite.

**Beispiel.** Wir berechnen den Fluss des Vektorfelds $\vec{u}(x,y,z)=(x^2,xy,xz)^\top$ durch die Oberfläche $\mathcal{A}$ des Einheitswürfels $\mathcal{D}=\{(x,y,z)\mid 0\le x,y,z\le 1\}$. Es gilt $\operatorname{div}\vec{u}(x,y,z)=2x+x+x=4x$, und der gaußsche Integralsatz liefert dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}}\vec{u}\cdot d\vec{\sigma}&=\int_{\mathcal{D}}\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x})\,d\vec{x}=4\int_0^1\int_0^1\int_0^1 x\,dx\,dy\,dz\\&=2x^2\,\Big|_{x=0}^{x=1}=2.\end{aligned}$$

△

Es folgen nun einige Anmerkungen zum gaußschen Integralsatz.

**Bemerkung** (Physikalische Anwendung von Satz 91.3). Wir betrachten hier die stationäre Strömung eines *inkompressiblen* Fluids in $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^d$ mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}:\mathcal{D}\to\mathbb{R}^d$. In diesem Fall liefert der Wert des Integrals der Quellstärke $\operatorname{div}\vec{u}$ über den Bereich $\mathcal{D}$ den Gesamtzuwachs des Volumens in $\mathcal{D}$ pro Zeiteinheit, verursacht als Bilanz von Quellen und Senken in $\mathcal{D}$. Das stimmt nach Satz 91.3 mit dem Volumenabfluss des Fluids durch den Rand (ebener Fall $d=2$) beziehungsweise die Oberfläche (räumlicher Fall $d=3$) von $\mathcal{D}$ überein.

**Bemerkung** (Beweisidee zu Satz 91.3). Die Plausibilität der Aussage von Satz 91.3 wurde für den räumlichen Fall $d=3$ im Fall eines kleinen quaderförmigen Volumenelements bereits in Bemerkung 91.2 erläutert. wobei dann in (91.5) auf dieser Seite noch durch $\Delta t$ zu dividieren ist. Im Fall eines allgemeinen räumlichen Bereichs $\mathcal{D}\subseteq\mathbb{R}^3$ wird die Aussage des Satzes plausibel, wenn man $\mathcal{D}$ durch eine Vereinigung passender kleiner Quader $\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2,\ldots,\mathcal{D}_n$ annähert. Dies liefert $\mathcal{D}\approx\cup_{j=1}^n\mathcal{D}_j$ und damit

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x})\,d\vec{x}&\approx\sum_{j=1}^n\int_{\mathcal{D}_j}\operatorname{div}\vec{u}(\vec{x})\,d\vec{x}\\&\approx\sum_{j=1}^n\int_{\mathcal{A}_j}\vec{u}\cdot d\vec{\sigma}\approx\int_{\mathcal{A}}\vec{u}\cdot d\vec{\sigma},\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}_j\subseteq\mathbb{R}^3$ die Randfläche von $\mathcal{D}_j$ bezeichnet. Man hat bei der letzten Approximation noch zu beachten,