

# XI Integrale von Funktionen über räumliche Flächen

## 88 Koordinatendarstellungen von Flächen

Eine räumliche Flächen  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  lässt sich in der Regel als Graph  $\mathcal{A} = T(\mathcal{D})$  einer differenzierbaren Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  beschreiben, wobei  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  gilt und die Abbildung  $T$  «im Wesentlichen» umkehrbar und orientierungstreu ist. Die präzisen Bedingungen sehen wie folgt aus:

(88.1)

- a) Es ist  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  eine abgeschlossene beschränkte Menge.
- b) Es ist  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare Abbildung, wobei  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  eine abgeschlossene beschränkte Menge mit  $\mu(\mathcal{D}) > 0$  ist und  $T(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$  gilt.
- c) Es gebe eine Menge  $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Es unterscheide sich  $\mathcal{D}'$  nur durch eine Nullmenge von  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ .
- Die Einschränkung  $T : \mathcal{D}' \rightarrow T(\mathcal{D}')$  ist umkehrbar.
- Für jedes  $\vec{\alpha} = (\xi, \eta) \in \mathcal{D}'$  sind die beiden Vektoren

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \\ \frac{\partial T_2}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \\ \frac{\partial T_3}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \\ \frac{\partial T_2}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \\ \frac{\partial T_3}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

linear unabhängig.

- Es ist  $\mathcal{D}'$  wegzusammenhängend.

Die Parametrisierung einer räumlichen Fläche  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  ist in Abbildung 165 illustriert.

**Bemerkung.** a) Die in b) von (89.1) angestellte Forderung der stetigen Differenzierbarkeit der Transformation  $T$  bedeutet formal die Existenz einer stetig differenzierbaren Abbildung  $\widehat{T}_1 : \widehat{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wobei  $\widehat{\mathcal{D}} \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge mit  $\mathcal{D} \subseteq \widehat{\mathcal{D}}$  ist, und  $\widehat{T}$  ist eine Fortsetzung von  $T$ , d. h. auf der Menge  $\mathcal{D}$  stimmen  $T$  und  $\widehat{T}$  überein.

b) Die in dem ersten Punkt der in c) von (89.1) genannten Eigenschaft bedeutet, dass für eine gewisse Null-

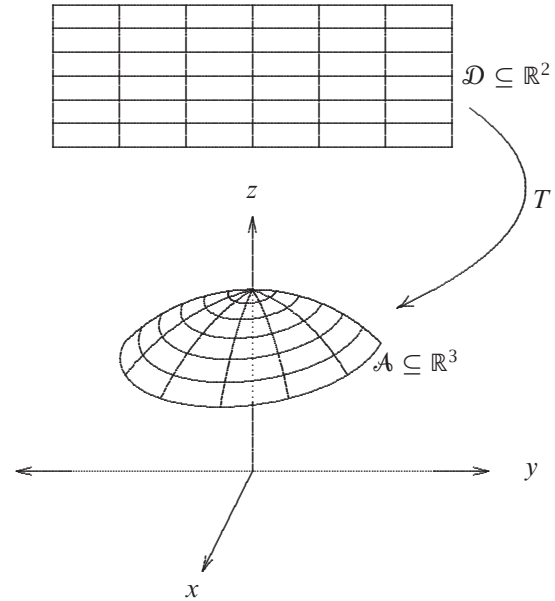


Abb. 165: Parametrisierung einer Fläche am Beispiel eines Teils der Kugeloberfläche

menge  $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^2$  die Identität  $\mathcal{D}' \cup \mathcal{N} = \mathcal{D}$  erfüllt ist.

c) Die angegebene Forderung der linearen Unabhängigkeit der beiden Vektoren  $\frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha})$  und  $\frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha})$  bedeutet, dass beide Vektoren  $\neq \vec{0}$  und nicht kollinear sind. Sie spannen dann die Tangentialebene an die Fläche  $\mathcal{A}$  im Punkt  $\vec{x} = T(\vec{\alpha}) \in \mathcal{A}$  auf. Δ

**Beispiel 88.1** (Mantel Zylinder). Die Mantelfläche  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  eines Zylinders, dessen Längsachse mit der  $z$ -Achse übereinstimmt und dessen Grundfläche kreisförmig ist mit Radius  $r > 0$ , besitzt die Form

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2, a \leq z \leq b\}.$$

Die Situation ist in Abbildung 166 dargestellt.

Die kartesischen Koordinaten von Elementen  $(x, y, z) \in \mathcal{A}$  des Zylindermantels lassen sich mit Hilfe zylindrischer Koordinaten in der Form

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (88.2)$$

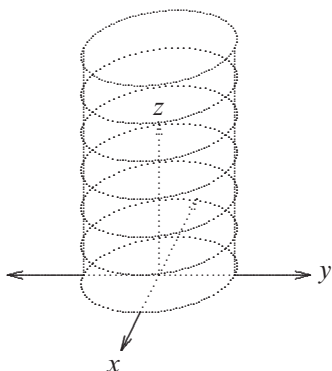


Abb. 166: Mantelfläche  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  eines Zylinders

mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $a \leq z \leq b$ , darstellen. Die Situation ist in Abbildung 143 auf Seite 220 illustriert. Für die Transformation

$$T(\varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], z \in [a, b], \quad (88.3)$$

gilt damit die Identität

$$T(\mathcal{D}) = \mathcal{A},$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= [0, 2\pi] \times [a, b] \\ &= \{(\varphi, z) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq z \leq b\}. \end{aligned}$$

Diese Transformation ist stetig differenzierbar, mit

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial T}{\partial z}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und  $a \leq z \leq b$ . Diese beiden Vektoren sind offenbar linear unabhängig. Außerdem ist für  $\mathcal{D}' = \{(\varphi, z) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, a \leq z \leq b\}$  die Abbildung  $T : \mathcal{D}' \rightarrow T(\mathcal{D}')$  ist umkehrbar. Für die Strecke  $\mathcal{N} = \{(2\pi, z) \mid a \leq z \leq b\}$  gilt die Identität  $\mathcal{D}' \cup \mathcal{N} = \mathcal{D}$ , und  $\mathcal{N}$  bildet eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$ . Die in (89.1) auf der vorherigen Seite aufgeführten Bedingungen sind damit alle erfüllt.  $\triangle$

**Beispiel 88.2** (Kugeloberfläche). Die Oberfläche  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  einer Kugel mit Radius  $r > 0$  und Mittelpunkt  $(0, 0, 0)$  besitzt die Form

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Die Punkte  $(x, y, z) \in \mathcal{A}$  lassen sich mit Hilfe von Kugelkoordinaten in der Form

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \delta \\ y &= r \sin \varphi \cos \delta \\ z &= r \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (88.4)$$

mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und  $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$  darstellen (siehe Beispiel 76.4 auf Seite 220). Die Situation ist in Abbildung 167 dargestellt.

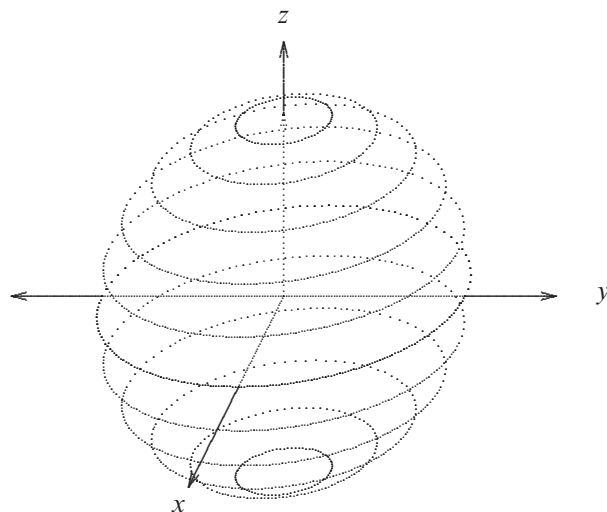


Abb. 167: Kugeloberfläche

Für die Transformation

$$T(\varphi, \delta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \delta \\ r \sin \varphi \cos \delta \\ r \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (88.5)$$

mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und  $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$  gilt damit die Identität

$$T(\mathcal{D}) = \mathcal{A} \text{ mit } \mathcal{D} = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Die Abbildung  $T$  ist stetig partiell differenzierbar, mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi, \delta) &= r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \delta \\ \cos \varphi \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial T}{\partial \delta}(\varphi, \delta) &= r \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \delta \\ -\sin \varphi \sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

für  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und  $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ . Diese Transformation erfüllt die Bedingungen aus (89.1) auf Seite 240 für

$$\mathcal{D}' = \{(\varphi, \delta) \mid 0 \leq \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}\}. \quad (88.6)$$

Man beachte, dass  $\frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi, \pm \frac{\pi}{2}) = (0, 0, 0)^\top$  gilt, so dass die Werte  $\delta = \pm \pi/2$  in (89.6) ausgeschlossen werden müssen.  $\Delta$

## 89 Flächenintegrale erster Art

**Definition 89.1** (Flächenintegral erster Art). Mit den Bezeichnungen aus (89.1) auf Seite 240 ist das Integral einer stetigen Funktion  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  über die Fläche  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  durch

$$\int_{\mathcal{A}} f(\vec{x}) d\sigma := \int_{\mathcal{D}} f(T(\vec{\alpha})) \left| \frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \right| d\vec{\alpha} \quad (89.1)$$

gegeben, wobei die Notation  $\vec{\alpha} = (\xi, \eta)$  verwendet wird und « $\times$ » das Kreuzprodukt für Vektoren in  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet.  $\Delta$

Die Verwendung von  $d\sigma$  auf der linken Seite von (90.1) soll dabei anzeigen, dass es sich um eine skalare Flächenintegration handelt. Das Symbol  $\sigma$  ist dabei nicht an eine Integrationsvariable gekoppelt. Der Wert  $\int_{\mathcal{A}} f(\vec{x}) d\sigma$  ist unabhängig von der speziellen Wahl der Transformation  $T$ .

**Bemerkung.** Im Folgenden wird heuristisch die Plausibilität der Setzung (76.6) für den Fall eines achsenparallelen zweidimensionalen Rechtecks

$$\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d] = \{(\xi, \eta) \mid a \leq \xi \leq b, c \leq \eta \leq d\}$$

geliefert. Hierzu wird eine Zerlegung von  $\mathcal{D}$  in Teilrechtecke

$$\mathcal{D}_{ij} := [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [\eta_{j-1}, \eta_j], \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n, \\ j = 1, 2, \dots, m, \end{matrix}$$

vorgenommen, wobei die Gitterpunkte äquidistant gewählt seien:

$$\xi_i = a + i \Delta \xi, \quad \eta_j = c + j \Delta \eta, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n, \\ j = 1, 2, \dots, m, \end{matrix}$$

mit Zahlen  $n, m \in \mathbb{N}$  und

$$\Delta \xi = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta \eta = \frac{d-c}{m}.$$

Wir betrachten dann

$$\mathcal{A}_{ij} := T(\mathcal{D}_{ij}), \quad \vec{x}_{ij} := T(\xi_i, \eta_j), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n, \\ j = 1, 2, \dots, m. \end{matrix}$$

Die Situation ist in Abbildung 168 am Beispiel eines Teils der Kugeloberfläche dargestellt, wobei dort Kugelkoordinaten verwendet werden.

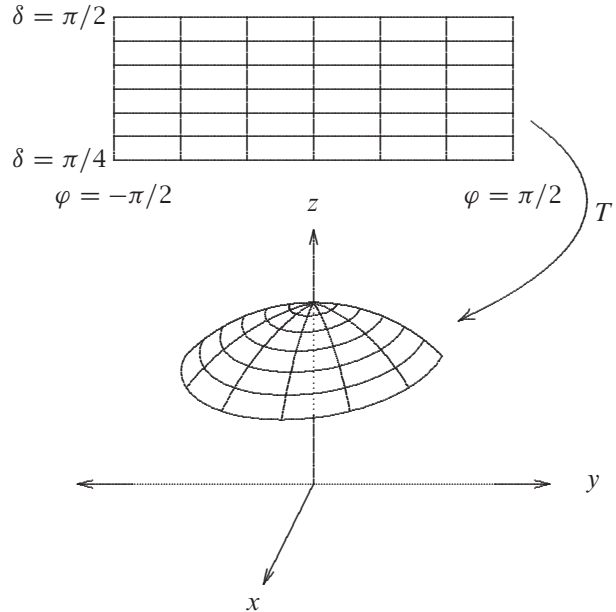


Abb. 168: Zerlegung einer Fläche am Beispiel eines Teils der Kugeloberfläche

Nun gilt für fest gewählte Werte  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  Folgendes:

- es ist der Flächeninhalt  $\mu(\mathcal{A}_{ij})$  des Flächenstücks  $\mathcal{A}_{ij}$  klein und stimmt in der Regel näherungsweise mit dem von den beiden Vektoren  $T(\xi_{i-1}, \eta_j) - T(\xi_i, \eta_j)$  und  $T(\xi_i, \eta_{j-1}) - T(\xi_i, \eta_j)$  aufgespannten Parallelogramm überein;
- für diese beiden Vektoren gilt näherungsweise

$$T(\xi_{i-1}, \eta_j) - T(\xi_i, \eta_j) \approx -\Delta \xi \frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_j),$$

$$T(\xi_i, \eta_{j-1}) - T(\xi_i, \eta_j) \approx -\Delta \eta \frac{\partial T}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_j).$$

Die Situation ist in Abbildung 169 dargestellt.

Damit stimmt der Flächeninhalt  $\mu(\mathcal{A}_{ij})$  näherungsweise mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 := -\Delta \xi \frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_j), \quad \vec{v}_2 := -\Delta \eta \frac{\partial T}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_j)$$

aufgespannten Parallelogramms überein.

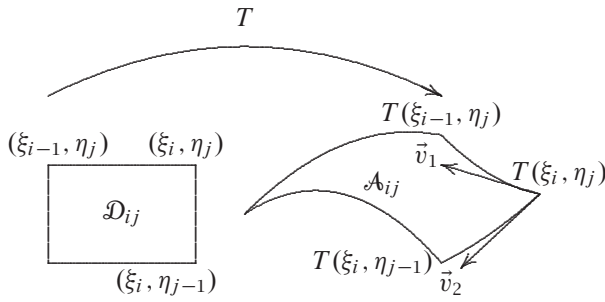


Abb. 169: Transformation eines kleinen Rechtecks mit  $\vec{v}_1 := -\Delta\xi \frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_j)$  und  $\vec{v}_2 := -\Delta\eta \frac{\partial T}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_j)$

- Der Flächeninhalt des von zwei beliebigen Vektoren  $\vec{v}_1 \in \mathbb{R}^3$  und  $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^3$  aufgespannten Parallelogramms ist gleich  $|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$  (siehe Bemerkung 40.3 auf Seite 107). Damit gilt

$$\mu(\mathcal{A}_{ij}) \approx \left| \frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_j) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_j) \right| \Delta\xi \Delta\eta,$$

und daraus resultiert schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} f(\vec{x}) d\sigma &\stackrel{(*)}{\approx} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\vec{x}_{ij}) \mu(\mathcal{A}_{ij}) \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(T(\xi_i, \eta_j)) \left| \frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_j) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_j) \right| \Delta\xi \Delta\eta \\ &\stackrel{(**)}{\approx} \int_{\mathcal{D}} f(T(\vec{\alpha})) \left| \frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha}) \right| d\vec{\alpha}. \end{aligned}$$

Dabei stellt der Ausdruck rechts von  $(*)$  eine riemannsche Summe zur Approximation des Integrals links von  $(*)$  dar, wobei es letztlich unerheblich ist, dass die Mengen  $\mathcal{A}_{ij}$  keine Rechteckbereiche darstellen. Analog ist der Ausdruck links von  $(**)$  eine riemannsche Summe zur Approximation des Integrals rechts von  $(**)$ .  $\Delta$

**Bemerkung 89.2.** Wir gehen noch kurz auf die physikalische Einheit des in (90.1) auf der vorherigen Seite eingeführten Flächenintegrals erster Art ein. Es gilt hier  $[\int_{\mathcal{A}} f(\vec{x}) d\sigma] = [f] \cdot [|\frac{\partial T}{\partial \xi}(\vec{\alpha}) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\vec{\alpha})|] \cdot [\xi] \cdot [\eta]$ .  $\Delta$

**Definition 89.3.** Für eine beschränkte Fläche  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  nennt man das Integral

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} 1 d\sigma \tag{89.2}$$

den *Flächeninhalt* von  $\mathcal{A}$ . Hierbei wird angenommen, dass dieses Integral existiert.  $\Delta$

**Beispiel** (Zylinderoberfläche). Die Mantelfläche

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2, a \leq z \leq b\}$$

eines Zylinders berechnet sich mit den Notationen aus Beispiel 89.1 auf Seite 240 wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi, z) \times \frac{\partial T}{\partial z}(\varphi, z) &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \left| \frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi, z) \times \frac{\partial T}{\partial z}(\varphi, z) \right| &= r, \end{aligned}$$

mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und  $a \leq z \leq b$  folgendermaßen:

$$\mu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} 1 d\sigma = \int_a^b \int_0^{2\pi} r d\varphi dz = 2\pi r(b-a). \quad \Delta$$

**Beispiel 89.4** (Kugeloberfläche). Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

berechnet sich mit den Notationen aus Beispiel 89.2 auf Seite 241 wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi, \delta) \times \frac{\partial T}{\partial z}(\varphi, \delta) &= r^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos^2 \delta \\ \sin \varphi \cos^2 \delta \\ (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin \delta \cos \delta \end{pmatrix} \\ &= r^2 \cos \delta \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \delta \\ \sin \varphi \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = r \cos \delta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial T}{\partial \varphi}(\varphi, \delta) \times \frac{\partial T}{\partial z}(\varphi, \delta) \right| &= r(\cos \delta)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &= r^2 \cos \delta \end{aligned}$$

mit  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und  $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{A}} 1 d\sigma = r^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \delta d\delta d\varphi \\ &= 2\pi r^2 \sin \delta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi r^2(1 - (-1)) = 4\pi r^2. \quad \Delta \end{aligned}$$

Wir betrachten nun noch den wichtigen Fall einer räumlichen Fläche, die sich als Graph einer differenzierbaren skalaren Funktion von zwei Veränderlichen darstellen lässt.

**Satz 89.5.** *Im Fall einer Fläche*

$$\mathcal{A} = \{(x, y, g(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

mit einer differenzierbaren Funktion  $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  und einer abgeschlossenen, beschränkten und wegzusammenhängenden Menge  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  gilt für jede stetige Funktion  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  die Identität

$$\int_{\mathcal{A}} f(\vec{x}) d\sigma = \int_{\mathcal{D}} f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}(x, y) dx dy.$$

BEWEIS. Die Transformation  $T$  ist hier von der Form  $T(x, y) = (x, y, g(x, y))^T$  für  $(x, y) \in \mathcal{D}$ , und damit gilt

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\left| \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) \right| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}(x, y).$$

Die angegebene Darstellung folgt nun unmittelbar aus Definition 90.1 auf Seite 242.  $\square$

**Beispiel 89.6.** Wir berechnen mit Hilfe von Satz 90.5 die auf den ersten Oktanten begrenzte Fläche  $x + y + z = 1$ . Hier gilt also  $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ . Eine mögliche Parametrisierung ist  $g(x, y) = 1 - x - y$  für  $(x, y) \in \mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ . Wegen  $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \equiv -1$  ergibt sich Folgendes:

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + 1 + 1} dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 dy dx \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 1 - x dx = \sqrt{3} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad \triangle$$

## 90 Flächenintegrale zweiter Art

### 90.1 Einleitung

Gegenstand des vorliegenden Abschnitts ist die Integration vektorwertiger Funktionen über orientierte räumliche Flächen  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

### 90.2 Beispiel: Durch ebene Fläche strömendes Fluid

Die Herleitung von Flächenintegralen zweiter Art geschieht in einzelnen Schritten am Beispiel der Berechnung des pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömenden Volumens eines zeitlich stationären Fluids.

#### 90.2.1 Senkrecht zur ebenen Fläche strömendes Fluid

Wir beginnen zunächst mit dem einfachsten Fall und betrachten dazu einen Bereich  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ , der eben verläuft. Wir geben diesem Bereich willkürlich eine Orientierung, indem eine Seite als negativ die andere Seite als positiv bezeichnet wird.

Senkrecht dazu ströme ein Fluid ungehindert mit einer (skalaren) Geschwindigkeit

$$u_n \in \mathbb{R}$$

durch diese Fläche. Die Geschwindigkeit sei sowohl unabhängig vom Ort als auch von der Zeit, wobei Strömungen mit der letztgenannten Eigenschaft als (zeitlich) *stationär* bezeichnet werden. Dabei gibt das Vorzeichen der Geschwindigkeit die Richtung der Bewegung vor, es bedeutet also z.B.  $u_n > 0$  einen Strom des Fluids von der negativen zur positiven Seite von  $\mathcal{A}$ . Die Situation ist in Abbildung 170 am Fall eines Rechteckbereichs dargestellt.

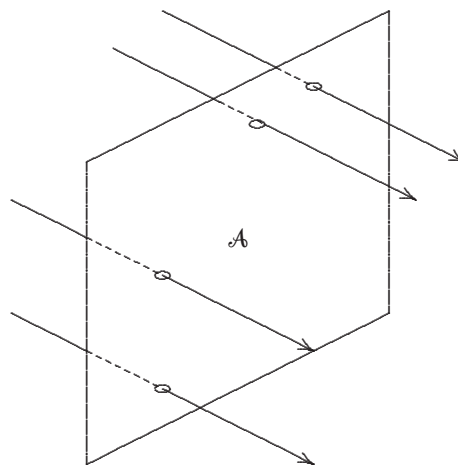


Abb. 170: Senkrechter Fluss durch einen Rechteckbereich  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$

Das Gesamtvolumen des durch den Bereich  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  geströmten Fluids beträgt in einem Zeitintervall der Dauer  $\Delta t > 0$  dann  $\Delta \text{vol} = u_n \mu(\mathcal{A}) \Delta t$ . Pro Zeiteinheit beträgt das Volumen des durchströmendes Fluids damit

$$\frac{\Delta \text{vol}}{\Delta t} = u_n \mu(\mathcal{A}) \in \mathbb{R}. \tag{90.1}$$

### 90.2.2 Beliebige Strömungsrichtung

Wir betrachten nun einen ebenen Bereich  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ , durch das ein Fluid ungehindert mit einer vektoriellen Geschwindigkeit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  strömt. Die Geschwindigkeit sei weiterhin sowohl unabhängig vom Ort als auch von der Zeit. Anders als in Abschnitt 91.2.1 ist nun nicht gefordert, dass die Stromrichtung senkrecht zur Fläche verläuft. Die Situation ist in Abbildung 171 am Fall eines Rechteckbereichs dargestellt. Wir zerlegen die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  in einen parallel und einen senkrecht zur Fläche verlaufenden Anteil:

$$\vec{u} = \vec{u}_t + \vec{u}_n \quad \text{mit} \quad \vec{u}_t, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{u}_t \parallel \mathcal{A}, \quad \vec{u}_n \perp \mathcal{A}. \tag{90.2}$$

Die Situation ist in Abbildung 171 am Fall eines Rechteckbereichs dargestellt.

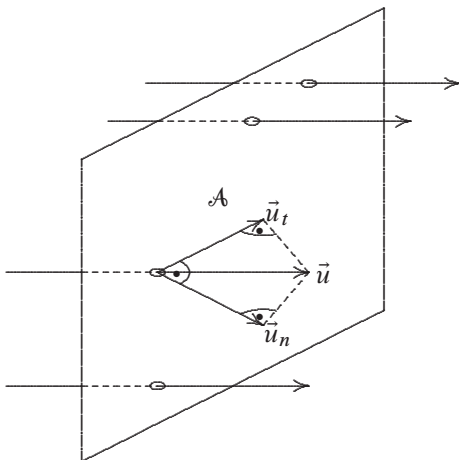


Abb. 171: Fluss durch einen Rechteckbereich  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$

**Bemerkung 90.1.** Wir gehen im Folgenden auf die Berechnung des Anteils  $\vec{u}_n \in \mathbb{R}^3$  ein.

- Wir betrachten dazu denjenigen auf die Länge eins normierten Vektor  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ , der senkrecht auf dem ebe-

nen Bereich  $\mathcal{A}$  steht (also ein Normalenvektor bezüglich  $\mathcal{A}$  ist):

$$\vec{n} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{n} \perp \mathcal{A}, \quad |\vec{n}| = 1.$$

Zudem soll er in positive Richtung zeigen (bezogen auf eine vorgegebene Orientierung der Fläche  $\mathcal{A}$ ; per Definition sei eine Seite von  $\mathcal{A}$  positiv). Man erhält den senkrechten Anteil der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}_n \in \mathbb{R}^3$  durch

$$\vec{u}_n = u_n \vec{n} \quad \text{mit} \quad u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} \in \mathbb{R},$$

wobei die Größe  $u_n$  der (vorzeichenbehafteten) skalaren Geschwindigkeit aus Abschnitt 91.2.1 entspricht.

- Die Berechnung des Normalenvektors  $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$  ist leicht mit Hilfe zweier linear unabhängiger, parallel zur Fläche  $\mathcal{A}$  liegender Vektoren  $\vec{u}_t^{(1)}, \vec{u}_t^{(2)} \in \mathbb{R}^3$  möglich:

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{u}_t^{(1)} \times \vec{u}_t^{(2)}}{|\vec{u}_t^{(1)} \times \vec{u}_t^{(2)}|}.$$

Das Vorzeichen ist dabei entsprechend der vorgegebenen Orientierung gewählt. Dabei zeigt der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$  in positive Richtung (d. h.  $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} > 0$ ) oder in die entgegengesetzte Richtung (d. h.  $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} < 0$ ), wobei hier  $u_n \neq 0$  angenommen ist.  $\Delta$

Das strömende Fluid lässt sich nach (91.2) als die Summe zweier strömender Fluide mit den jeweiligen Geschwindigkeiten  $\vec{u}_t$  und  $\vec{u}_n$  auffassen. Dabei strömt der parallel strömende Anteil sicher nicht durch die Fläche  $\mathcal{A}$ , und das Gesamtvolumen des *senkrecht* durch den Bereich  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  geströmten Fluids beträgt pro Zeiteinheit damit

$$u_n \mu(\mathcal{A}) = \vec{u} \cdot \vec{n} \mu(\mathcal{A}),$$

siehe (91.1). Das ist dann auch das Gesamtvolumen des durch den Bereich  $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$  strömenden Fluids pro Zeiteinheit:

$$\frac{\Delta \text{vol}}{\Delta t} = \vec{u} \cdot \vec{n} \mu(\mathcal{A}).$$

### 90.3 Normalenvektoren für Flächen

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Verallgemeinerung der zuvor angestellten Betrachtungen auf nicht-konstante strömende Fluide durch nichtebene Flächen im Raum. Dies macht die Verallgemeinerung des Begriffs Normalenvektor erforderlich.