

X Wellenausbreitung

85 Mathematische Modellierung der Ausbreitung von Wellen

85.1 Die eindimensionale Ausbreitung von Wellen

Zunächst soll ein einfacher Schwinger betrachtet werden. Dieser besteht aus $n - 1$ kleinen Massenpunkten, die horizontal gleichmäßig über das Intervall $[0, L]$ verteilt sind. Der horizontale Abstand zwischen je zwei benachbarten Massenpunkten sei mit

$$\Delta x = L/n$$

bezeichnet. Jeder Massenpunkt ist mit seinen benachbarten Massenpunkten durch Fäden verbunden, wobei die Fäden an den Intervallrändern $x = 0$ und $x = L$ befestigt sind.

Jeder dieser Massenpunkte lässt sich in vertikaler Richtung auslenken. Für das sich daraus ergebende vertikale Schwingungsverhalten wird im Folgenden ein mathematisches Modell beschrieben. Daraus erhält man durch einen Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ein mathematisches Modell für die schwingende Saite.

Im weiteren Verlauf bezeichne für $j = 1, \dots, n - 1$

- $x_j = j\Delta x$ Position in horizontaler Richtung
- m_j Masse
- $y_j(t)$ vertikale Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit $t \geq 0$,

jeweils bezogen auf den j -ten Massenpunkt. Weiter bezeichne

$$\sigma > 0$$

den (von der Zeit und vom Ort unabhängigen) Betrag der Spannkraft des Fadens. Die vorliegende Situation ist in Abbildung 155 veranschaulicht.

Für $j = 1, 2, \dots, n - 1$ wirken im Falle von angenommenen kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage auf den vertikal ausgelenkten Massenpunkt an der Position x_j zur Zeit t näherungsweise die beiden vertikalen Kräfte

$$-\sigma \frac{y_j(t) - y_{j-1}(t)}{\Delta x}, \quad \sigma \frac{y_{j+1}(t) - y_j(t)}{\Delta x}. \quad (85.1)$$

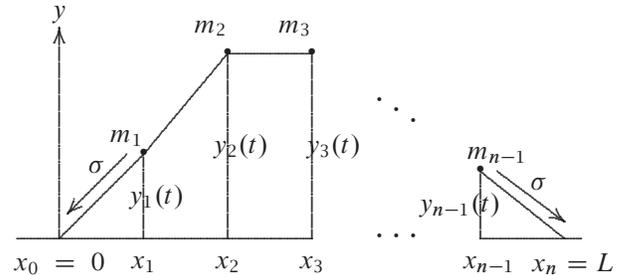
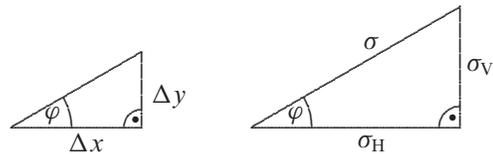


Abb. 155: Einfacher Schwinger zur Zeit $t \geq 0$

Bemerkung 85.1. Dabei ergeben sich die beiden Terme in (86.1) durch folgende Überlegungen, die hier allerdings lediglich für den rechten Term ausgeführt werden. Mit der Notation $\Delta y = y_{j+1}(t) - y_j(t)$ liegt folgende Situation vor (wobei hier $\Delta y > 0$ angenommen ist):



Es gibt eine positive Zahl $c > 0$ (die beiden betrachteten Dreiecke sind ähnlich) mit

$$\sigma_H = c\Delta x, \quad \sigma_V = c\Delta y, \\ \sigma = \sqrt{\sigma_H^2 + \sigma_V^2} = c\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Daraus resultiert

$$\sigma_V = c\Delta y = \sigma \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \sigma \frac{\Delta y/\Delta x}{\sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2}} \\ \approx \sigma \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{für } 0 < \Delta y \ll \Delta x,$$

wobei sich die angegebene Näherung aus der Annahme kleiner Auslenkungen ergibt. Δ

Auf Grund der Randbefestigung des Fadens gilt dabei $y_0(t) = 0$ beziehungsweise $y_n(t) = 0$ für $t \geq 0$. Die Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte lauten da-

her nach dem newtonschen Bewegungsgesetz

$$m_j \ddot{y}_j(t) = -\sigma \frac{y_j(t) - y_{j-1}(t)}{\Delta x} + \sigma \frac{y_{j+1}(t) - y_j(t)}{\Delta x} \quad (85.2)$$

für $j = 1, 2, \dots, n - 1,$

$$y_j(t) = y_n(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Zusätzlich liegen noch die Anfangsbedingungen

$$y_j(0) = y_{0j}, \quad \dot{y}_j(0) = y_{1j} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (85.3)$$

vor, die die zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ vorliegende Auslenkung beziehungsweise Geschwindigkeit der einzelnen Massenpunkte beschreiben. Hierbei handelt es sich um ein Anfangs-Randwertproblem für ein gekoppeltes System von $n - 1$ linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung.

Die schwingende Saite erhält man nun als Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$. Mit den Notationen $\varrho > 0$ für die Dichte der Saite als Masse pro Längeneinheit geht das System von Differenzialgleichungen (86.2) mit der plausiblen Setzung $m_j = \varrho \Delta x$ über in

$$\varrho \ddot{y}_j(t) = \sigma \frac{y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_{j-1}(t)}{(\Delta x)^2} \quad (85.4)$$

für $j = 1, 2, \dots, n - 1,$

$$y_0(t) = y_n(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Daraus erhält man ein mathematisches Modell für eine eingespannte schwingende Saite, wobei die vertikale Auslenkung $u(x, t) \in \mathbb{R}$ zur Zeit $t \geq 0$ im Ort $0 \leq x \leq L$ aus der Ruhelage beschrieben werden soll. Für kleine Werte von Δx wird dieses annähernd durch (86.4) beschrieben mit den Approximationen

$$y_j(t) \approx u(x_j, t) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n, \quad t \geq 0.$$

Eine Anwendung des zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung zur Approximation der zweiten Ableitung einer Funktion von einer Veränderlichen liefert Folgendes (Details zur Herleitung der Differenzenapproximation entfallen):

$$\frac{y_{j+1}(t) - 2y_j(t) + y_{j-1}(t)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t)}{(\Delta x)^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t),$$

$$\ddot{y}_j(t) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t) \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n - 1, \quad t \geq 0,$$

erhält man daher für die zu bestimmende Auslenkung $u(x, t)$ der schwingenden Saite die partielle Differenzialgleichung

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (85.5)$$

Außerdem führt die Einspannung der Saite am Rand auf die Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0. \quad (85.6)$$

Zusätzlich liegen noch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L \quad (85.7)$$

vor, die die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegende Auslenkung beziehungsweise Geschwindigkeit der Saite beschreiben.

Die partielle Differenzialgleichung (86.5) wird als (räumlich eindimensionale) *Schwingungsgleichung* oder auch als *Wellengleichung* bezeichnet. Hierbei handelt es sich um eine spezielle lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Insgesamt stellt (86.5)–(86.6) ein Anfangs-Randwertproblem für die Schwingungsgleichung dar. In Abbildung 156 ist die vorliegende Situation mit der Notation

$$c^2 = \frac{\sigma}{\varrho}$$

in der Orts-Zeit-Ebene dargestellt.

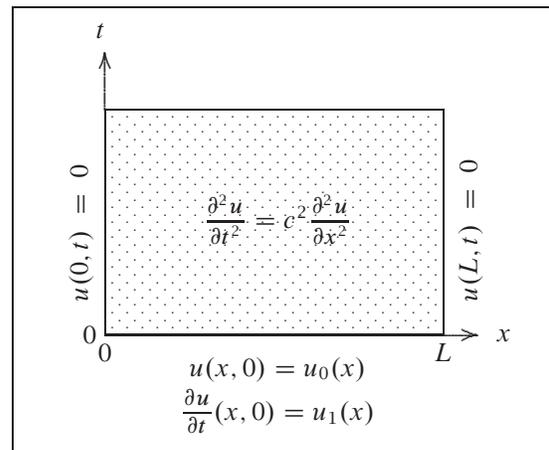


Abb. 156: Anfangs-Randwertproblems für die eindimensionale Wellengleichung in der Orts-Zeit-Ebene

85.2 Die ebene Ausbreitung von Wellen

Das Schwingungsverhalten einer Membran wird durch die *räumlich zweidimensionale Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = c^2 \Delta u(x, y, t) \quad \text{für } (x, y) \in \mathcal{D}, \quad t \geq 0, \quad (85.8)$$

beschrieben mit einer offenen Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$. Hierbei bezeichnet Δ den hier nur auf den Ortsvariablen wirkenden *Laplace-Operator*

$$\Delta u(x, y, t) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)(x, y, t) \quad (85.9)$$

für $(x, y) \in \mathcal{D}$, $t \geq 0$.

Zusätzlich liegen noch die Anfangsbedingungen

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = u_1(x, y), \quad (85.10)$$

für $(x, y) \in \mathcal{D}$

vor, die die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegende Auslenkung beziehungsweise Geschwindigkeit der Membran beschreiben. Die Einspannung der Membran am Rand führt auf die Randbedingungen

$$u(x, y, t) = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial \mathcal{D}, \quad t \geq 0. \quad (85.11)$$

85.3 Die räumlich dreidimensionale Ausbreitung von Wellen

Die mathematische Modell der räumlichen Schallausbreitung oder einer elektromagnetischen Schwingung wird durch die *räumlich dreidimensionale Wellengleichung* beschrieben. Diese ist von der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, z, t) = c^2 \Delta u(x, y, z, t) \quad (85.12)$$

für $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, $t \geq 0$,

bei der der Laplace-Operator Δ die Form

$$\Delta u(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)(x, y, z, t) \quad (85.13)$$

für $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, $t \geq 0$

hat.

85.4 Nichtlineare Wellengleichung

Nichtlineare Wellengleichungen treten beispielsweise bei der mathematischen Modellierung von schwingenden Saiten oder Membranen mit größeren Auslenkungen aus der Ruhelage auf. Die Schwingungsgleichung für die Saite nimmt in dieser Situation im räumlich eindimensionalen Fall die folgende Form an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)^2\right)^{3/2}} \quad (85.14)$$

für $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$.

86 Die räumlich unbeschränkte Schwingungsgleichung in einer Dimension

Im Folgenden wird der Einfachheit halber das Schwingungsverhalten einer in beiden Richtungen unendlichen Saite betrachtet. In dieser Situation nimmt die zugehörige Schwingungsgleichung die Form (vergleiche (86.5))

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (86.1)$$

an. Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten hier

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \quad (86.2)$$

mit gegebenen stetigen Funktionen $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Das nachfolgende Theorem liefert eine Klasse von Lösungen für die Schwingungsgleichung (87.1), die als *d'Alembertsche Lösungen* bezeichnet werden.

Satz 86.1. Für beliebige gewählte zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stellt die Funktion

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (86.3)$$

eine Lösung der räumlich eindimensionalen Schwingungsgleichung (87.1) dar. Die Funktion (87.3) erfüllt die Anfangsbedingungen (87.2) mit der speziellen Wahl

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ g(x) &= \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \quad (86.4)$$

BEWEIS. Die Aussage (87.3) erhält man unmittelbar aus der Anwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= c^2 f''(x - ct) + c^2 g''(x + ct) \\ &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Für den Nachweis der Aussage (87.4) über die richtige Anpassung an die Anfangsbedingungen betrachtet

man zunächst die d'Alembertsche Lösung (87.3) und erhält

$$f(x) + g(x) = u_0(x), \quad c(-f'(x) + g'(x)) = u_1(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (86.5)$$

Eine Integration der zweiten Identität in (87.5) liefert

$$c(-f(x) + g(x)) = \int_0^x u_1(\xi) d\xi + K \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (86.6)$$

mit einer reellen Konstanten K , und ein anschließendes Auflösen in der ersten Gleichung aus (87.5) und in (87.6) nach den beiden Unbekannten $f(x)$ und $g(x)$ liefert mit der Setzung $K = 0$ die Aussage (87.4). Dies komplettiert den Beweis. \square

Als unmittelbare Konsequenz von Satz 87.1 auf der vorherigen Seite ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 86.2. *Unter den Bedingungen von Satz 87.1 auf der vorherigen Seite lässt sich die Lösung des Anfangswertproblems (87.2) für die räumlich eindimensionale, unbeschränkte Schwingungsgleichung (87.1) in der kompakten Form*

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (86.7)$$

schreiben, falls u_0 und u_1 hinreichend glatt sind.

Man beachte, dass die in (87.7) angegebene Funktion u auch für nichtdifferenzierbare Funktionen u_0 und u_1 wohldefiniert ist und einen Schwingungsvorgang beschreibt (ohne dann allerdings die Wellengleichung zu erfüllen).

Es sollen nun noch zwei Abhängigkeitsbereiche illustriert werden. In Abbildung 157 ist für fest gewählte Werte x_0 und t_0 derjenige Bereich für $(x, 0)$ zur Zeit $t = 0$ gekennzeichnet, für den die Anfangswerte $u_0(x)$ und $u_1(x)$ Einfluss auf den Wert $u(x_0, t_0)$ haben.

In Abbildung 158 ist für einen fest gewählten Wert x_0 derjenige Bereich für x und t gekennzeichnet, für den die beiden Anfangswerte $u_0(x_0)$ und $u_1(x_0)$ Einfluss auf den Wert $u(x, t)$ haben.

Beispiel 86.3. Im Spezialfall $u_1 \equiv 0$ (Anfangsgeschwindigkeit gleich null) ist die Lösung der räumlich eindimensionalen, unbeschränkten Schwingungsgleichung (87.2) nach Korollar 87.2 von der Form

$$u(x, t) = \frac{u_0(x - ct) + u_0(x + ct)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

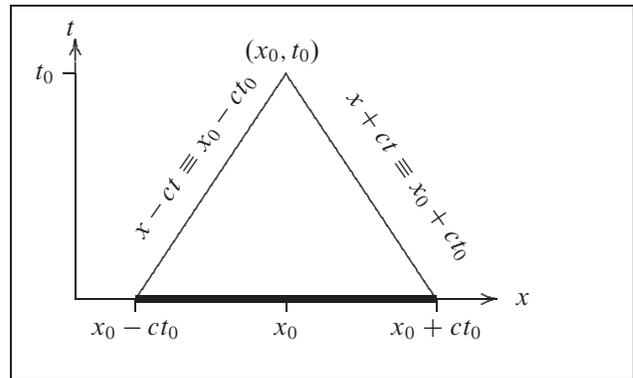


Abb. 157: Eindimensionale Wellengleichung in der (x, t) -Ebene. Der Bereich aus der Zeitschicht $t = 0$ mit Auswirkungen auf den Wert von $u(x_0, t_0)$ ist hervorgehoben dargestellt

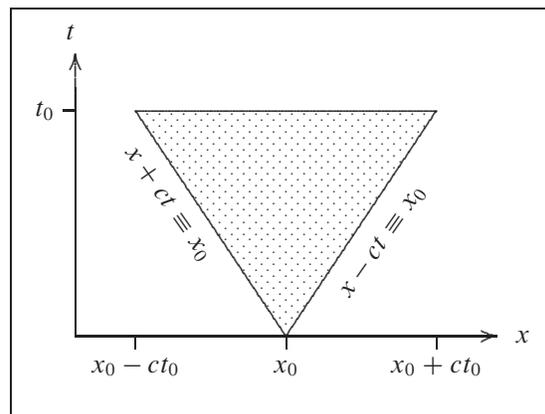


Abb. 158: Eindimensionale Wellengleichung in der (x, t) -Ebene. Der von $u_0(x_0)$ und $u_1(x_0)$ beeinflusste Bereich ist bis zu einer Zeit $t = t_0$ schraffiert dargestellt

Hier beschreibt der erste Summand im Zähler eine mit der Geschwindigkeit c nach rechts laufende Welle, der zweite Summand liefert eine mit der Geschwindigkeit c nach links laufende Welle.

Wir sehen uns den Spezialfall

$$u_0(x) = \begin{cases} \frac{A}{\varepsilon}(x - x_0) + A & \text{für } x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0, \\ -\frac{A}{\varepsilon}(x - x_0) + A & \text{für } x_0 < x \leq x_0 + \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für die Situation $\varepsilon = 0,05$, $A = 0,4$ und $x_0 = 0,5$ genauer an. Der räumliche Verlauf der Lösung ist in den Abbildungen 159-161 für die sechs Zeiten $t =$

$k \Delta t, k = 0, \dots, 5$ dargestellt, wobei $\Delta t = 0,0125$ gewählt ist. Die gewählte Geschwindigkeit ist $c = 1$.

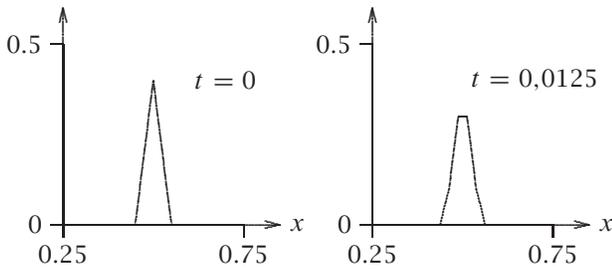


Abb. 159: Der räumliche Verlauf von $u(\cdot, t)$ für $t = 0$ beziehungsweise $t = 0,0125$

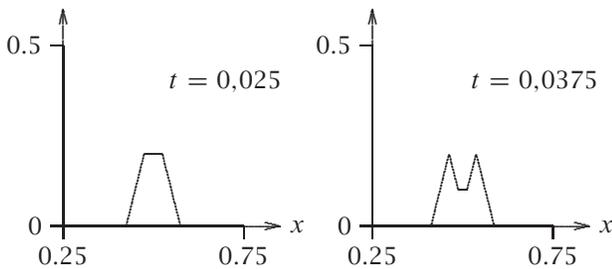


Abb. 160: Der räumliche Verlauf von $u(\cdot, t)$ für $t = 0,025$ beziehungsweise $t = 0,0375$

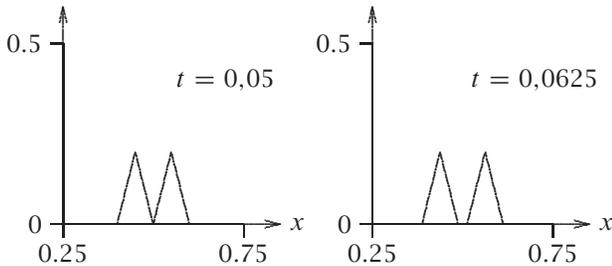


Abb. 161: Der räumliche Verlauf von $u(\cdot, t)$ für $t = 0,05$ beziehungsweise $t = 0,0625$

87 Die fouriersche Methode

Im Folgenden wird das Anfangs-Randwertproblem (86.5)-(86.6) für die Schwingungsgleichung betrachtet. Es liegt somit das folgende Anfangs-Randwertproblem

vor:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ & t \geq 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{für } 0 \leq x \leq L, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{für } 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (87.1)$$

Die Nullrandbedingungen ermöglichen die Verwendung des Ansatzes der Trennung der Veränderlichen, der bereits bei der Diffusionsgleichung verwendet worden ist und im Folgenden an die vorliegende Situation angepasst werden soll. Es wird der Ansatz

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \quad (87.2)$$

herangezogen zur Gewinnung von allgemeinen Lösungen der Schwingungsgleichung; Rand- und Anfangsbedingungen spielen also zunächst keine Rolle. Einzelheiten hierzu werden im nachfolgenden Abschnitt 88.1 vorgestellt. In Abschnitt 88.2 werden dann die vorgegebenen Randbedingungen berücksichtigt, und in Abschnitt 88.3 wird eine Superposition der gewonnenen Lösungen unter Anpassung der auftretenden Koeffizienten vorgenommen. Dies liefert schließlich die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (88.1).

87.1 Trennung der Veränderlichen

Als Erstes werden Bedingungen an die Funktionen $X : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ und $T : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ hergeleitet, sodass die zugehörige Funktion u aus (88.2) die Schwingungsgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ für $0 \leq x \leq L$ und $t \geq 0$ löst, Nullrand- und Anfangsbedingungen spielen also zunächst keine Rolle. Hierzu berechnet man ausgehend von dem Ansatz (88.2) zunächst

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = X(x)T''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = X''(x)T(t) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

sodass für die Erfüllung der Schwingungsgleichung notwendigerweise

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \quad (87.3)$$

gelten muss. Für den Moment sei hierbei $X(x) \neq 0$ für jedes $0 < x < L$ beziehungsweise $T(t) \neq 0$ für jedes $t \geq 0$ angenommen, wobei man diese Restriktion

später wieder fallen lassen kann. Es verhält sich nun so, dass die linke Seite der Identität (88.3) lediglich von der Ortsvariablen x und nicht von der Zeitvariablen t abhängt, und bei der rechten Seite ist es genau umgekehrt. Dies bedeutet aber, dass beide Seiten der Identität (88.3) notwendigerweise konstant sein müssen, es gilt also

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -r^2 \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \quad (87.4)$$

mit einer noch zu spezifizierenden reellen Konstanten $r^2 > 0$. Denkbar wäre hier auch die Zulassung nicht-positiver Konstanten r bei gleichzeitigem Verzicht der Quadratbildung. Im Zuge der weiteren Berechnungen stellt sich jedoch heraus, dass sich damit die Randbedingungen nicht erfüllen lassen beziehungsweise man im Fall $r = 0$ nur die triviale Lösung erhält. Daher kann man sich auch gleich auf positive Konstanten r^2 beschränken, wobei sich durch die Verwendung von $r^2 > 0$ anstelle von $r > 0$ die Notation vereinfachen wird.

Die Darstellung (88.4) führt unmittelbar auf die beiden linearen gewöhnlichen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

$$X''(x) + \left(\frac{r}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, \quad (87.5)$$

$$T''(t) + r^2 T(t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0. \quad (87.6)$$

Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung (88.5) gewinnt man durch einen *Exponentialansatz*

$$X(x) = e^{\lambda x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L \quad (87.7)$$

mit einem zu bestimmenden Koeffizienten $\lambda \in \mathbb{C}$. Zweimalige Differentiation in (88.7) liefert

$$X''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L,$$

und die gewöhnliche Differenzialgleichung (88.5) für die gesuchte Funktion X geht dann über in

$$\left(\lambda^2 + \left(\frac{r}{c}\right)^2\right) e^{\lambda x} = 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq L. \quad (87.8)$$

Division in (88.8) durch den in jedem Fall von null verschiedenen Wert $e^{\lambda x}$ führt auf die Bestimmungsgleichung $\lambda^2 = -(r/c)^2$, die eine Lösung

$$\lambda = \lambda_r = i \frac{r}{c}$$

besitzt. Es existiert noch eine zweite Lösung $\lambda = -ir/c$, die letztlich jedoch auf keine weiteren reellwertigen Lösungen der betrachteten gewöhnliche Differenzialgleichung (88.5) führt. Der Exponentialansatz (88.7) liefert

also zu der gewöhnlichen Differenzialgleichung (88.5) die komplexwertige Lösung

$$X_r(x) = e^{i(r/c)x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L.$$

Gesucht sind jedoch reellwertige Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung (88.5). Diese erhält man durch Heranziehen von Real- und Imaginärteil der Funktion X_r

$$\operatorname{Re} X_r(x) = \cos((r/c)x), \quad \operatorname{Im} X_r(x) = \sin((r/c)x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L.$$

Diese Vorgehensweise ist allerdings nur deshalb zulässig, weil die in (88.5) auftretenden Koeffizienten reell sind.

Genauso gewinnt man eine komplexwertige Lösung der gewöhnlichen Differenzialgleichung (88.6),

$$T_r(t) = e^{irt} \quad \text{für } t \geq 0$$

beziehungsweise durch Heranziehen von Real- und Imaginärteil der Funktion T_r die beiden reellwertigen Lösungen

$$\operatorname{Re} T_r(t) = \cos(rt), \quad \operatorname{Im} T_r(t) = \sin(rt) \quad \text{für } t \geq 0$$

für die gesuchte Funktion T . Die so gewonnenen Lösungen der Schwingungsgleichung haben also die Form

$$\operatorname{Re} X_r(x) \operatorname{Re} T_r(t) = \cos((r/c)x) \cos(rt),$$

$$\operatorname{Re} X_r(x) \operatorname{Im} T_r(t) = \cos((r/c)x) \sin(rt),$$

$$\operatorname{Im} X_r(x) \operatorname{Re} T_r(t) = \sin((r/c)x) \cos(rt),$$

$$\operatorname{Im} X_r(x) \operatorname{Im} T_r(t) = \sin((r/c)x) \sin(rt)$$

für $0 \leq x \leq L, t \geq 0$.

87.2 Anpassung an die Randbedingungen

In diesem Abschnitt werden diejenigen Werte von r bestimmt, für die die Nullrandbedingungen aus (88.1) erfüllt sind. Wegen $\operatorname{Re} T_r \neq 0$ und $\operatorname{Im} T_r \neq 0$ für $t \geq 0$ ist klar, dass man die Betrachtungen auf die Funktion X_r beschränken kann. Dabei kommt wegen $\operatorname{Re} X_r(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ nur der Imaginäranteil $\operatorname{Im} X_r$ in Frage. Hier ist in $x = 0$ die Randbedingung für jedes $r > 0$ erfüllt,

$$\operatorname{Im} X_r(0) = \sin 0 = 0.$$

In $x = L$ führt die Randbedingung auf

$$\operatorname{Im} X_r(L) = \sin\left(\frac{rL}{c}\right) = 0,$$

was für $\frac{rL}{c} \in \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$ erfüllt ist. Letzteres umformuliert bedeutet

$$r \in \left\{ n \frac{c\pi}{L} : n = 1, 2, \dots \right\}. \quad (87.9)$$

Somit stellen die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} v_n(x, t) &:= \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(n\frac{\pi c}{L}t\right), \\ w_n(x, t) &:= \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(n\frac{\pi c}{L}t\right) \\ \text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (87.10)$$

jeweils Lösungen der Schwingungsgleichungen dar, die zudem alle die Nullrandbedingungen aus (88.1) erfüllen.

87.3 Superposition - Anpassung an die Anfangsbedingung

Auf Grund der Linearität der vorliegenden Differenzialgleichung und der auftretenden Nullrandbedingungen sind endliche Linearkombinationen der Funktionen v_n und w_n für $n = 1, 2, \dots$ ebenfalls Lösungen der betrachteten Differenzialgleichung, die zugleich wie gefordert an den beiden Rändern verschwinden. Es ist naheliegend, auch Funktionen von der Form

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (c_n v_n(x, t) + d_n w_n(x, t)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) (c_n \cos\left(n\frac{\pi c}{L}t\right) + d_n \sin\left(n\frac{\pi c}{L}t\right)) \\ &\text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \end{aligned} \quad (87.11)$$

zu betrachten mit den bezüglich der Variablen x $2L$ -periodischen Funktionen v_n und w_n aus (88.10). Dabei soll ohne weitere Hinterfragung hinreichend gute Differenzierbarkeitseigenschaften der Grenzfunktion u angenommen werden. Formal erhält man

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n v_n(x, 0) + d_n w_n(x, 0)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \stackrel{!}{=} u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (87.12)$$

Zur Anpassung an die Anfangsbedingungen ist in (88.12) nach einer $2L$ -periodischen Fourier-Entwicklung

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + \sum_{j=0}^{\infty} f_j \cos\left(j\frac{\pi}{L}x\right) \quad (87.13)$$

für $0 \leq x \leq L$

der gegebenen Funktion $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ zu suchen, in der alle Kosinus-Anteile wegfallen beziehungsweise die Koeffizienten f_j für $j = 0, 1, \dots$ allesamt verschwinden. Dies wird erreicht durch eine ungerade Fortsetzung der Funktion u_0 auf das Intervall $[-L, 0]$,

$$u_0(-x) := -u_0(x) \text{ für } 0 \leq x < L.$$

Eine $2L$ -periodische Fourier-Entwicklung der entstehenden ungeraden Funktion $u_0 : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ liefert tatsächlich die Identität (88.13) mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0(y) \sin\left(n\frac{\pi}{L}y\right) dy \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin\left(n\frac{\pi}{L}y\right) dy \text{ für } n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

$$f_j = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0(y) \cos\left(j\frac{\pi}{L}y\right) dy = 0 \text{ für } j = 0, 1, \dots$$

Entsprechend erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \frac{\partial v_n}{\partial t}(x, 0) + d_n \frac{\partial w_n}{\partial t}(x, 0)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c \frac{\pi}{L} n d_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \\ &\stackrel{!}{=} u_1(x) \text{ für } 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (87.14)$$

Durch eine ungerade Fortsetzung der Funktion u_1 auf das Intervall $[-L, 0]$,

$$u_1(-x) := -u_1(x) \text{ für } 0 \leq x < L,$$

und eine anschließende $2L$ -periodische Fourier-Entwicklung der resultierenden ungeraden Funktion $u_1 : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ liefert die Identität (88.14) mit den Fourier-Koeffizienten

$$d_n = \frac{2}{c\pi n} \int_0^L u_1(y) \sin\left(n\frac{\pi}{L}y\right) dy \text{ für } n = 1, 2, \dots \quad (87.15)$$

Eine Setzung (88.11) mit einer Wahl der Koeffizienten c_n und d_n gemäß (88.14) beziehungsweise (88.15) liefert also schließlich die gesuchte Lösung des Anfangs-Randwertproblems (88.1) für die Schwingungsgleichung.

Beispiel. Wir betrachten hier das einfache Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \text{ für } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 7 \sin 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleiche in (88.12) und (88.14) liefern $c_3 = 7$ und $c_n = 0$ sonst sowie trivialerweise $d_1 = d_2 = \dots = 0$. Die gesuchte Lösung besitzt damit nach (88.14) wegen $c = 2$ die Form

$$u(x, t) = 7 \sin 3x \cos 6t \text{ für } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0. \quad (87.16)$$

Der grafische Verlauf der Lösung ist in den Abbildungen 162-164 dargestellt. Δ

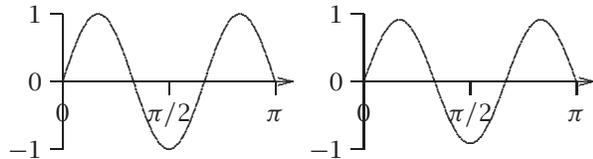


Abb. 162: Der räumliche Verlauf von $u(\cdot, t)$ für $t = 0$ beziehungsweise $t = 0,0125$

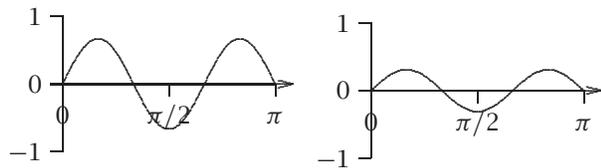


Abb. 163: Der räumliche Verlauf von $u(\cdot, t)$ für $t = \frac{2\pi}{9}$ beziehungsweise $t = \frac{3\pi}{9}$

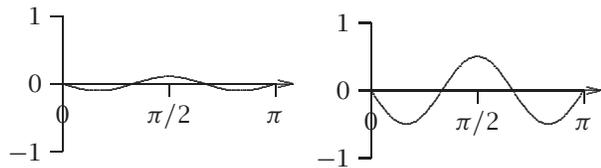


Abb. 164: Der räumliche Verlauf von $u(\cdot, t)$ für $t = \frac{4\pi}{9}$ beziehungsweise $t = \frac{5\pi}{9}$