

Die Darstellung in (80.8) für die Fourier-Koeffizienten b_n erhält man auf vergleichbare Weise. Δ

Beispiel 80.9. In einfachen Situationen kann man die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n aus (80.8) direkt bestimmen. So gelten z. B. im Fall

$$f(x) = A \sin(sx) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

mit $A \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{N}$ nach Lemma 80.1 die Identitäten $a_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ und $b_n = 0$ für $n = 1, 2, \dots$ mit $n \neq s$ sowie $b_s = A$. Die Fourier-Reihe von f besteht in diesem Fall aus einem einzigen Summanden, die Frage nach der Konvergenz der Fourier-Reihe stellt sich hier also nicht. Dieser Summand ist identisch mit der Funktion f .

Ähnlich verhält es sich im Fall

$$f(x) = A \cos(sx) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

mit $A \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{N}$. Hier gelten wieder nach Lemma 80.1 die Identitäten $b_n = 0$ für $n = 1, 2, \dots$ und $a_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ mit $n \neq s$ sowie $a_s = A$. Δ

Bemerkung. Die Fourier-Koeffizienten $a_n = a_n(f)$ und $b_n = b_n(f)$ hängen linear von der betrachteten Funktion f ab: es gilt $a_n(\alpha f + \beta g) = \alpha a_n(f) + \beta a_n(g)$ für $n = 0, 1, \dots$ und Entsprechendes für die Koeffizienten b_n . Diese Eigenschaft ist für praktische Berechnungen hilfreich. Δ

Ein nichttriviales Beispiel für eine Fourier-Entwicklung finden Sie auf Seite 233.

80.3 Konvergenz von Fourier-Reihen

Im Folgenden gehen wir der Frage nach, auf welche Weise eine gegebene Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Partialsummen

$$f_s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^s (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (80.10)$$

der 2π -periodischen Fourier-Reihe in (80.9) auf der vorherigen Seite approximiert wird. Die Anteile f , deren Frequenz größer als $s/(2\pi)$ ausfällt, werden bei f_s in (80.10) also weggelassen.

Wir beschränken uns dabei auf zwei Resultate.

Satz 80.10. *Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und einmal stetig differenzierbar, so konvergiert die 2π -*

periodische Fourier-Reihe (80.9) der Funktion f im folgenden Sinne gegen f :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^s (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right) \right| \rightarrow 0$$

für $s \rightarrow \infty$. Die Fourier-Koeffizienten der Funktion f sind absolut-summierbar, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$.

BEWEIS. Der Beweis wird hier nicht geführt. \square

Die in Satz 80.10 vorliegende Art der Konvergenz wird als gleichmäßige Konvergenz bezeichnet.

Die Fourier-Koeffizienten einer 2π -periodischen Funktion f fallen mit wachsendem Index n umso schneller, je glatter die Funktion f ist; hohe Frequenzen sind in f dann weniger stark vertreten:

Proposition 80.11. *Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und r -mal stetig differenzierbar mit $r \geq 0$, so gilt mit einer Konstanten $K \geq 0$*

$$|a_n| + |b_n| \leq K n^{-r} \text{ für } n = 1, 2, \dots \quad (80.11)$$

BEWEIS. Wir betrachten hier zunächst eine komplexwertige Variante. Wiederholte partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \pi(a_n - ib_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \underbrace{0}_{=0} \\ &= -\frac{1}{in} f(y) e^{-iny} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{(in)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{(in)^3} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(3)}(y) e^{-iny} dy \\ &= \dots = \frac{1}{(in)^r} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(y) e^{-iny} dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(a_n^2 + b_n^2)^{1/2} \leq 2 \left(\max_{y \in [-\pi, \pi]} |f^{(r)}(y)| \right) n^{-r}$$

und daraus wiederum die Abschätzung (80.11). \square

Wir betrachten nun ein Konvergenzresultat unter schwächeren Voraussetzungen an die gegebene Funktion f .

Satz 80.12. *Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine 2π -periodische Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.*

a) Ist f stetig in x_0 , so konvergieren die Partialsummen der 2π -periodischen Fourier-Reihe in x_0 gegen den Funktionswert $f(x_0)$, d. h.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^s (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \rightarrow f(x_0) \text{ für } s \rightarrow \infty.$$

b) Falls f unstetig in x_0 ist, jedoch die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ existieren, so konvergiert die Folge der Partialsummen der 2π -periodischen Fourier-Reihe gegen das arithmetische Mittel dieser beiden Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^s (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) \\ \rightarrow \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \right) \text{ für } s \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

In der Umgebung von Sprungstellen der Funktion f treten bei den Partialsummen verstärkt Oszillationen auf, was man als *gibbsches Phänomen* bezeichnet. Die Situation ist in Beispiel 80.14 veranschaulicht.

80.4 Fourier-Entwicklung gerader und ungerader Funktionen

In diesem Abschnitt werden die Fourier-Reihen gerader und ungerader Funktionen (siehe Definition 18.3 auf Seite 39) behandelt.

Proposition 80.13. Sei $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.

a) Ist f gerade bezüglich des Intervallmittelpunkts $x = 0$, d. h.

$$f(-x) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq \pi,$$

so gelten die Identitäten $b_n = 0$ für $n = 1, 2, \dots$ und $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \cos ny \, dy$ für $n = 0, 1, \dots$.

b) Ist f ungerade bezüglich des Intervallmittelpunkts $x = 0$ d. h.

$$f(-x) = -f(x) \text{ für } 0 < x \leq \pi,$$

so gelten die Identitäten $a_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ und $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin ny \, dy$ für $n = 1, 2, \dots$.

BEWEIS. Übung. □

Die 2π -periodischen Fourier-Reihen gerader und ungerader Funktionen beinhalten also lediglich Cosinus- beziehungsweise Sinus-Funktionen. Letzteres ist für die

am Ende von Abschnitt 78 entstandene Situation bei der Anpassung von freien Koeffizienten an die vorliegende Anfangsbedingung (siehe (79.17) auf Seite 229) von Bedeutung.

Beispiel 80.14. Für die ungerade Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\alpha, & -\pi \leq x < 0 \\ \alpha, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (80.12)$$

mit $\alpha > 0$ konstant gilt $a_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ und

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\pi \sin ny \, dy = -\frac{2\alpha}{n\pi} \cos ny \Big|_{y=0}^{y=\pi} \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \frac{2\alpha}{\pi n} (1 - (-1)^n) \\ &= \begin{cases} \frac{4\alpha}{\pi n}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

für $n = 1, 2, \dots$ beziehungsweise

$$\begin{aligned} b_{2n} &= 0 \text{ für } n = 1, 2, \dots, \\ b_{2n+1} &= \frac{4\alpha}{\pi} \frac{1}{2n+1} \text{ für } n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Es gilt damit

$$f(x) \sim \frac{4\alpha}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

Die Situation ist für $\alpha = 2$ in Abb. 152 dargestellt, wobei dort der Graph der Funktion $\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{20} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$ dargestellt ist; es werden also nur die ersten 21 Summanden der Fourier-Reihe berücksichtigt. △

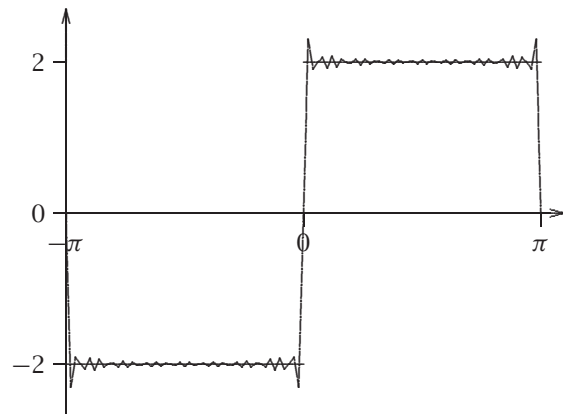


Abb. 152: Fourier-Entwicklung der Funktion (80.12)

80.5 Allgemeine Intervalle

80.5.1 Einführung

Fourier-Reihen für Funktionen mit anderen Definitionsbereichen lassen sich durch einfache Transformationen gewinnen. Für eine gegebene Funktion

$$f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$$

betrachtet man die folgende Variablentransformation und die zugehörige Funktion,

$$\hat{x} := \frac{\pi}{L}x \in [-\pi, \pi] \quad \text{für } -L \leq x \leq L, \quad (80.13)$$

$$\hat{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\hat{x}) = f(x) \quad \text{für } -L \leq x \leq L. \quad (80.14)$$

Als $2L$ -periodische Fourier-Reihe der Funktion f erhält man dann

$$\begin{aligned} f(x) &= \hat{f}(\hat{x}) \\ &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\hat{x} + b_n \sin n\hat{x}] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\frac{\pi}{L}x) + b_n \sin(n\frac{\pi}{L}x)] \quad (80.15) \end{aligned}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\hat{y}) \cos n\hat{y} d\hat{y} \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos(n\frac{\pi}{L}y) dy, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\hat{y}) \sin n\hat{y} d\hat{y} \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin(n\frac{\pi}{L}y) dy \quad \text{für } n = 0, 1, \dots \quad (80.16) \end{aligned}$$

unter Verwendung der Identitäten

$$\hat{y} := \frac{\pi}{L}y \in [-\pi, \pi] \quad \text{für } -L \leq y \leq L, \quad d\hat{y} = \frac{\pi}{L}dy.$$

Bemerkung 80.15. Die in der Fourier-Reihe (80.15) auftretenden Funktionen $\cos(n\frac{\pi}{L}x)$ und $\sin(n\frac{\pi}{L}x)$ sind $\frac{2L}{n}$ -periodisch bezüglich der Variablen $x \in \mathbb{R}$. Damit ist die Fourier-Reihe $2L$ -periodisch bezüglich der Variablen x . Häufig betrachtet man daher solche Fourier-Reihen (80.15) für $2L$ -periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. \triangle

80.5.2 Gerade und ungerade Funktionen

Falls die Funktion $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ gerade oder ungerade bezüglich des Intervallmittelpunkts ist, vereinfacht sich die $2L$ -periodische Fourier-Entwicklung von f :

a) Ist f gerade bezüglich des Intervallmittelpunkts $x = 0$, d. h.

$$f(-x) = f(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L,$$

so gelten die Identitäten $b_n = 0$ für $n = 1, 2, \dots$ und

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \cos(n\frac{\pi}{L}y) dy \quad \text{für } n = 0, 1, \dots$$

b) Ist f ungerade bezüglich des Intervallmittelpunkts $x = 0$, d. h.

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für } 0 < x \leq L,$$

so gelten die Identitäten $a_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin(n\frac{\pi}{L}y) dy \quad \text{für } n = 0, 1, \dots$$

81 Superposition – Fortsetzung

Es werden nun die Betrachtungen aus Abschnitt 79 zu dem Anfangs-Randwertproblem für die Diffusionsgleichung fortgesetzt. Wir können nun die Richtigkeit der Identität (79.17) auf Seite 229 mit der Wahl der Koeffizienten b_1, b_2, \dots aus (79.18) nachweisen.

Wir benötigen eine $2L$ -periodische Fourier-Entwicklung der zur Anfangsbedingung gehörenden Funktion $u_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, bei der nur Sinusfunktionen auftreten. Diese erhält man durch eine ungerade Fortsetzung der Funktion u_0 auf das Intervall $[-L, 0]$,

$$u_0(-x) := -u_0(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L.$$

Eine $2L$ -periodische Fourier-Entwicklung der entstehenden ungeraden Funktion $u_0 : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ liefert nach den Ausführungen in Abschnitt 80.5.1 Folgendes:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin(n\frac{\pi}{L}y) dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

Das stimmt mit der Setzung (79.17), (79.18) auf Seite 229 überein. Die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (79.1) auf Seite 227 ist damit vollständig bestimmt.

Beispiel. Gegeben ist das folgendes Anfangs-Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \cos 2x \quad \text{für } 0 \leq x \leq \pi.$$

Hier gilt (Übungsaufgabe)

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos 2y \sin ny \, dy = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{\pi} \frac{n}{n^2-4}, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

für $n = 1, 2, \dots$ und damit

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^\infty \frac{n}{n^2-4} \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

für $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$. Man beachte noch, dass inkonsistente Rand- und Anfangsbedingungen vorliegen: es gilt am linken Rand $u(0, 0) = 1$ und $u(0, t) = 0$ für $t > 0$, Entsprechendes am rechten Rand. Die Lösung u ist daher unstetig in $x = 0, t = 0$ und in $x = \pi, t = 0$. Δ

Bemerkung. Der Darstellung der Lösung (79.16) auf Seite 229 kann man noch entnehmen, dass räumlich höherfrequente Anteile in der Lösung u mit der Zeit stärker gedämpft werden als räumlich niederfrequente Anteile. Δ

82 Separation der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

Wir lassen nun - allgemeiner als zuvor - Inhomogenitäten in der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung zu, womit sich Wärmequellen beziehungsweise -senken modellieren lassen. Wir beginnen dabei mit einer einfachen Situation bei den Rand- und Anfangsbedingungen.

82.1 Nullrand- und Anfangsbedingungen

Es wird nun das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Diffusionsgleichung betrachtet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \\ &\text{für } 0 \leq x \leq L, t > 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0 \text{ für } 0 \leq x \leq L \end{aligned} \tag{82.1}$$

mit einer gegebenen Funktion $f : [0, L] \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Hier setzt man folgendermaßen an:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty b_n(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \tag{82.2}$$

für $0 \leq x \leq L, t \geq 0$,

mit passend zur Inhomogenität $f(x, t)$ gewählten zeitabhängigen Koeffizienten $b_1(t), b_2(t), \dots$.

Gegenüber dem Ansatz (79.16) auf Seite 229 wird hier eine Variation der Konstanten durchgeführt wird, wobei der in (79.16) auftretende Term $e^{-(n\pi/L)^2 t}$ in den Term $b_n(t)$ integriert wird. Man beachte außerdem, dass die Summanden in (82.2) bereits alle die Randbedingungen erfüllen.

Zur Bestimmung der Koeffizienten $b_n(t)$ verwendet man für die Funktion f die - zeitabhängige gerade $2L$ -periodische - Fourier-Entwicklung

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^\infty f_n(t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \text{ für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \tag{82.3}$$

mit den von t abhängenden Fourier-Koeffizienten $f_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L f(y, t) \sin\left(n \frac{\pi}{L} y\right) dy, n = 1, 2, \dots$. Man erhält daraus sowie aus der in (82.1) betrachteten Differenzialgleichung die notwendige Bedingung

$$\sum_{n=1}^\infty \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \left[b'_n(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 b_n(t) - f_n(t) \right] = 0$$

für $0 \leq x \leq L, t \geq 0$, wobei eine hinreichend gute Konvergenz der Reihe (82.2) sowie hinreichend gute Differenzierbarkeitseigenschaften der dort auftretenden Grenzfunktion u vorausgesetzt werden. Hieraus ergeben sich für die Koeffizienten $b_n(t)$ die Bedingungen

$$b'_n(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 b_n(t) = f_n(t) \text{ für } t > 0 \tag{82.4}$$

für $n = 1, 2, \dots$. Die Anfangsbedingungen für die zu bestimmenden Funktionen $b_1(t), b_2(t), \dots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung für die gesuchte Lösung u in (82.1),

$$b_n(0) = 0 \text{ für } n = 1, 2, \dots \tag{82.5}$$

Bei (82.4)-(82.5) handelt es sich für jeden Index n um ein Anfangswertproblem für eine lineare inhomogene gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung, deren Lösung sich explizit angeben lässt (siehe Satz 65.20 auf Seite 181):

$$b_n(t) = \int_0^t e^{-(n\pi c/L)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \text{ für } t > 0,$$

für $n = 1, 2, \dots$. Für die Lösung $u(x, t)$ aus dem Ansatz (82.2) erhält man daraus die Darstellung

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^\infty \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \left[\int_0^t e^{-(n\pi c/L)^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right].$$

Beispiel 82.1. Mit den Notationen dieses Abschnitts betrachten wir mit den Setzungen $L = \pi$ und $c = 1$ den einfachen Fall

$$f(x, t) = f(x) = \sin sx \text{ für } 0 \leq x \leq \pi$$

(es liegt hier also keine Zeitabhängigkeit vor) mit $s \in \mathbb{N}$. Für die Fourier-Koeffizienten gilt $f_s(t) = 1$ beziehungsweise $f_n(t) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq s$. Die Lösung des betrachteten Anfangs-Randwertproblems für die inhomogene Diffusionsgleichung (siehe (82.1) auf der vorherigen Seite) ist damit von der einfachen Form

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sin(sx) \int_0^t e^{-s^2(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{s^2} \sin(sx) e^{-s^2(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{s^2} \sin(sx) (1 - e^{-s^2 t}) \end{aligned}$$

für $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$. Der räumliche Verlauf der Lösung ist für den Wert $s = 1$ in Abbildung 153 für die fünf Zeiten $t = k \Delta t$, $k = 1, \dots, 5$ dargestellt, wobei $\Delta t = 0,5$ gewählt ist.

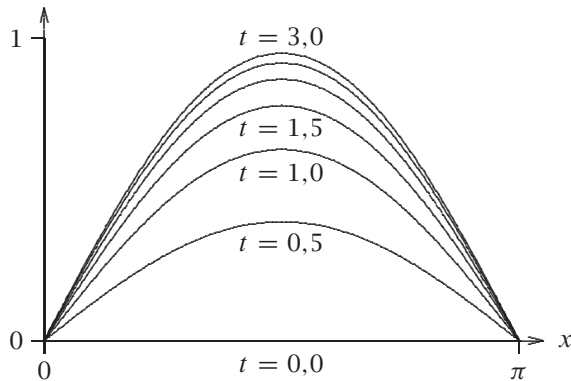


Abb. 153: Der räumliche Verlauf von $u(\cdot, t)$ für fünf Zeiten t . Δ

82.2 Allgemeine Rand- und Anfangsbedingungen

Wir lassen nun in der räumlich eindimensionalen Diffusionsgleichung neben Inhomogenitäten auch allgemeine Rand- und Anfangsbedingungen zu. Es wird das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Diffusions-

gleichung betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \\ &\text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(L, t) = u_2(t) \\ &\text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ für } 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (82.6)$$

Hier kann man wie folgt vorgehen: man erzeugt zunächst eine Aufgabe mit homogenen Randbedingungen (und veränderter Anfangsbedingung und Inhomogenität), indem man eine hinreichend glatte Funktion $\varphi(x, t)$ mit den Eigenschaften

$$\varphi(0, t) = u_1(t), \quad \varphi(L, t) = u_2(t) \quad \text{für } t \geq 0$$

wählt, so z. B. eine (von $t \geq 0$ abhängige) lineare Interpolierende bezüglich x . Es ist dann offensichtlich die Funktion u eine Lösung von (82.6) genau dann, wenn die Funktion

$$v(x, t) = u(x, t) - \varphi(x, t) \text{ für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \quad (82.7)$$

Lösung des Anfangs-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) \\ &+ [f(x, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t)] \\ &\text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \\ v(x, 0) &= u_0(x) - \varphi(x, 0) \text{ für } 0 \leq x \leq L, \end{aligned} \quad (82.8)$$

ist. Es handelt sich bei (82.8) um ein Anfangs-Randwertproblem für die inhomogene Diffusionsgleichung mit homogenen Randwerten. Dieses lässt sich in zwei Teilprobleme zerlegen:

- Man löst zum einen die zu (82.8) gehörende homogene Gleichung, d. h. der Term in den eckigen Klammern dort ist durch null zu ersetzen. Diese Lösung sei mit v_1 bezeichnet.
- Außerdem löst man das Problem (82.8) für homogene Anfangsbedingungen, d. h. die Anfangswerte sind dort null zu setzen. Diese Lösung sei mit v_2 bezeichnet.

Diese beiden Lösungen können mit dem bereits vorgestellten Separationsansatz berechnet werden. Deren

«Überlagerung» $v = v_1 + v_2$ liefert dann die Lösung zu dem Anfangs-Randwertproblem (82.8). Mit der Darstellung (82.7) gewinnt man dann schließlich die Lösung

$$u = v_1 + v_2 + \varphi$$

zu dem Anfangs-Randwertproblem (82.6).

Beispiel. Es wird das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Diffusionsgleichung betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + 3 \sin 2x && \text{für } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 1 && \text{für } t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \frac{x}{\pi} + 4 \sin 5x && \text{für } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned} \tag{82.9}$$

Die Funktion $\varphi(x, t) = \frac{x}{\pi}$ für $0 \leq x \leq \pi$ erfüllt $\varphi(0, t) = 0$ und $\varphi(\pi, t) = 1$. Es löst damit eine Funktion u das vorgegebene Problem, falls die transformierte Funktion $v = u - \varphi$ das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, t) + 3 \sin 2x && \text{für } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(\pi, t) = 0 && \text{für } t \geq 0, \\ v(x, 0) &= 4 \sin 5x && \text{für } 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

löst. Dabei ist noch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, t) = 0 && \text{für } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\ v(x, 0) &= u(x, 0) - \frac{x}{\pi} && \text{für } 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

berücksichtigt.

a) Die zum Anfangs-Randwertproblem für v gehörende homogene Diffusionsgleichung (die Inhomogenität $3 \sin 2x$ wird durch null ersetzt) besitzt die Lösung

$$v_1(x, t) = 4 \sin(5x)e^{-25t} \text{ für } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0.$$

b) Die zum Anfangs-Randwertproblem für v gehörende Diffusionsgleichung mit homogenen Anfangsbedingungen (die Anfangsbedingung $4 \sin 5x$ wird zu null gesetzt) besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} v_2(x, t) &= 3 \sin(2x) \int_0^t e^{-4(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{3}{4} \sin(2x)e^{-4(t-\tau)} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{3}{4} \sin(2x)(1 - e^{-4t}) \end{aligned}$$

für $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$.

Die Lösung u zu dem vorgegebenen Problem (82.9) ist damit

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v_1(x, t) + v_2(x, t) + \varphi(x, t) \\ &= 4 \sin(5x)e^{-25t} + \frac{3}{4} \sin(2x)(1 - e^{-4t}) + \frac{x}{\pi} \end{aligned}$$

für $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$. Δ

83 Minimum-Maximum-Prinzip

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\mathcal{D} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}, \tag{83.1}$$

$$\partial \mathcal{D}_1 := \{(x, T) \mid 0 < x < L\}. \tag{83.2}$$

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{D}_2 &:= \{(0, t) \mid 0 \leq t \leq T\} \cup \{(L, t) \mid 0 \leq t \leq T\} \\ &\cup \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq L\}. \end{aligned} \tag{83.3}$$

für reelle Zahlen $L > 0$ und $T > 0$. Es bezeichnet also $\partial \mathcal{D}_1$ den oberen Rand der Menge \mathcal{D} , und die Menge $\partial \mathcal{D}_2$ bildet den verbleibenden Teil des Randes von \mathcal{D} . Wir betrachten im Folgenden eine Funktion $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ auf } \mathcal{D}. \tag{83.4}$$

Die Situation ist in Abbildung 154 dargestellt.

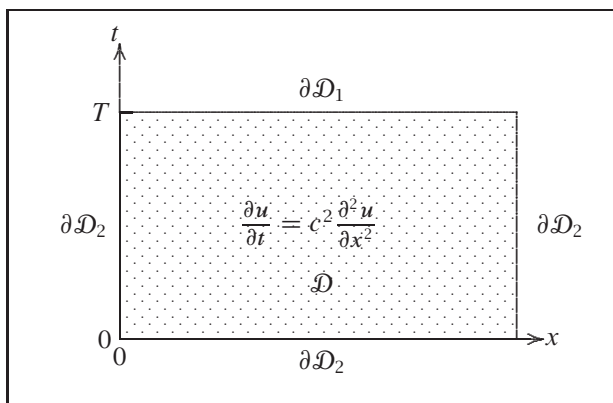


Abb. 154: Darstellung des Minimum-Maximum-Prinzips für die räumlich eindimensionale Diffusionsgleichung in der Orts-Zeit-Ebene

In der vorliegenden Situation gilt ein Minimum-Maximum-Prinzip, das wichtige Konsequenzen für eindeutige Lösbarkeit und Stabilität der Diffusionsgleichung hat. Damit lasse sich Erhaltungsprinzipien nachweisen.

Satz 83.1. (Minimum-Maximum-Prinzip) Sei $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Lösung der homogenen Diffusionsgleichung (83.4). Dann nimmt die Funktion u ihr Maximum und ihr Minimum jeweils auf dem Teilstück $\partial \mathcal{D}_2$ an, d. h.

$$\begin{aligned} \min_{(x,t) \in \mathcal{D}} u(x, t) &= \min_{(x,t) \in \partial \mathcal{D}_2} u(x, t), \\ \max_{(x,t) \in \mathcal{D}} u(x, t) &= \max_{(x,t) \in \partial \mathcal{D}_2} u(x, t). \end{aligned}$$

Hierbei werden die Bezeichnungen (83.1)–(83.3) verwendet.

BEWEIS. Wird hier nicht geführt. \square

Das Minimum-Maximum-Prinzip liefert die eindeutige Lösbarkeit der Diffusionsgleichung:

Satz 83.2. Seien $\varphi : \partial\mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen, wobei die Bezeichnungen (83.1)–(83.3) verwendet werden. Dann existiert höchstens eine stetige Lösung $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangs-Randwertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ auf } \mathcal{D}, \quad u = \varphi \text{ auf } \partial\mathcal{D}_2. \quad (83.5)$$

BEWEIS. Für zwei Lösungen u_1, u_2 des Anfangs-Randwertproblems (83.5) betrachtet man die Differenz $u = u_1 - u_2$. Diese stellt eine Lösung der homogenen Diffusionsgleichung (83.4) dar, die zudem auf dem Teilstück $\partial\mathcal{D}_2$ des Randes verschwindet. Nach dem Minimum-Maximum-Prinzip gilt damit aber $u = 0$ beziehungsweise $u_1 = u_2$ auf der gesamten Menge \mathcal{D} . \square

Mit Hilfe des Minimum-Maximum-Prinzips lassen sich auch Stabilitätsfragen behandeln.

Satz 83.3. Seien $\varphi : \partial\mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen, wobei die Bezeichnungen (83.1)–(83.3) verwendet werden. Seien $u_1, u_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Lösungen der inhomogenen Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \text{ auf } \mathcal{D}$$

mit

$$|u_1 - u_2| \leq \varepsilon \text{ auf } \partial\mathcal{D}_2.$$

Dann gilt $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$ auf \mathcal{D} .

BEWEIS. Man betrachtet wiederum die Differenz $u = u_1 - u_2$. Diese stellt eine Lösung der homogenen Diffusionsgleichung (83.4) dar, für die zudem auf dem Teilstück \mathcal{D}_2 des Randes Folgendes gilt,

$$-\varepsilon \leq u \leq \varepsilon \text{ auf } \mathcal{D}_2.$$

Nach dem Minimum-Maximum-Prinzip gilt damit aber $-\varepsilon \leq u \leq \varepsilon$ auf der gesamten Menge \mathcal{D} , was mit der Aussage des Satzes übereinstimmt. \square

84 Erhaltungsprinzipien

Wir sehen uns zum Abschluss dieses Kapitels noch zwei Erhaltungsprinzipien für die Diffusionsgleichung an.

84.1 Nichtnegativität

Satz 84.1. Sei $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Lösung der homogenen Diffusionsgleichung (83.4), wobei die Bezeichnungen (83.1)–(83.3) verwendet werden. Es gelte $u \geq 0$ auf dem Teilstück $\partial\mathcal{D}_2$ des Randes $\partial\mathcal{D}$. Dann gilt $u \geq 0$ auf \mathcal{D} .

BEWEIS. Das Minimum-Maximum-Prinzip liefert

$$u(x, t) \geq \min_{(\xi, \tau) \in \partial\mathcal{D}_2} u(\xi, \tau) \geq 0 \text{ für } (x, t) \in \mathcal{D}. \quad \square$$

84.2 Massenerhaltung

Im Fall fehlender Quellen und Senken – es treten also keine Inhomogenitäten auf – und einer zu jeder Zeit ausgeglichenen Bilanz an den Rändern (die links zu einer Zeit t eintretende Menge stimmt mit rechts austretende Menge überein) muss zur das wird im folgenden Satz durch die Bedingung (84.1) gesichert) liegt in dem betrachteten Bereich Massenerhaltung vor:

Satz 84.2. Es sei $u : [0, L] \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine hinreichend glatte Funktion, die die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \text{ für } 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0$$

erfüllt und außerdem den periodischen Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \text{ für } t \geq 0 \quad (84.1)$$

genügt. Dann ist das Integral der Funktion $u(\cdot, t)$ unabhängig von der Zeit t , d. h.

$$\int_0^L u(x, t) dx = \int_0^L u(x, 0) dx \text{ für } t \geq 0.$$

BEWEIS. Integration von u bezüglich x und anschließende Differenzierung bezüglich t ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L u(x, t) dx &= \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx \\ &= c^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx = c^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=0}^{x=L} = 0 \end{aligned}$$

für $t \geq 0$, wobei die Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration bei hinreichender Glattheit von u zulässig ist. \square

Bemerkung. Beschreibt die Funktion u die Konzentration eines Stoffes, so steht $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ für die räumliche Momentanänderung dieser Konzentration an der Stelle x zur Zeit t . Die periodischen Neumann-Randbedingungen (84.1) bedeuten daher wie oben angedeutet, dass die links zu einer Zeit t eintretende Menge mit der zur gleichen Zeit rechts austretenden Menge übereinstimmt. \triangle