

Abb. 148: Darstellung der Situation bei einem Anfangs-Randwertproblem für die Diffusionsgleichung in der Orts-Zeit-Ebene

b) Zur Theorie der partiellen Differenzialgleichungen gehört die Diskussion der *Existenz*, der *Eindeutigkeit* sowie der *stetigen Abhängigkeit von den Anfangs- und den Randwerten*. Für die Diffusionsgleichung werden diese Fragen in den Abschnitten 79 und 83 behandelt. Δ

## 79 Die fouriersche Methode für die Diffusionsgleichung

Im Folgenden wird das Anfangs-Randwertproblem für die Diffusionsgleichung (78.7)–(78.9) für homogene Randbedingungen  $u_1(t) = u_2(t) = 0$  mit  $t \geq 0$  betrachtet. (Verallgemeinerungen finden Sie in Abschnitt 82.) Es liegt somit das folgende Anfangs-Randwertproblem vor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \text{ für } 0 \leq x \leq L, \\ \hspace{15em} t \geq 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ für } 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (79.1)$$

Die Nullrandbedingungen erlauben einen speziellen Lösungsweg, der im Folgenden vorgestellt wird. Er beruht auf dem Ansatz der *Trennung der Veränderlichen*

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad (79.2)$$

wobei auch von der *Separation der Veränderlichen* gesprochen wird. Der Ansatz (79.2) wird zur Gewinnung

einer möglichst großen Schar von Lösungen der Diffusionsgleichung vorgenommen, Nullrand- und Anfangsbedingungen spielen dabei zunächst keine Rolle. Einzelheiten hierzu werden im nachfolgenden Abschnitt 79.1 vorgestellt. In Abschnitt 79.2 werden dann die vorgegebenen Randbedingungen berücksichtigt, und in Abschnitt 79.3 wird eine *Superposition* der gewonnenen Lösungen unter Anpassung der auftretenden Koeffizienten an die Anfangsbedingung vorgenommen. Dies liefert schließlich die Lösung des Anfangs-Randwertproblems (79.1).

### 79.1 Trennung der Veränderlichen

Als Erstes werden Bedingungen an die Funktionen  $X : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  hergeleitet, sodass die zugehörige Funktion  $u$  aus (79.2) die Diffusionsgleichung  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  für  $0 \leq x \leq L, t \geq 0$ , löst. Nullrand- und Anfangsbedingungen spielen also zunächst keine Rolle. Hierzu berechnet man ausgehend von dem Ansatz (79.2) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = X(x)T'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = X''(x)T(t)$$

für  $0 \leq x \leq L, t \geq 0$ , sodass für die Erfüllung der Diffusionsgleichung notwendigerweise

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \text{ für } 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \quad (79.3)$$

gelten muss. Für den Moment sei hierbei  $X(x) \neq 0$  und  $T(t) \neq 0$  für alle  $0 \leq x \leq L, t \geq 0$  angenommen. Diese Restriktion kann später wieder fallen gelassen werden.

Es ist nun so, dass die linke Seite der Identität (79.3) lediglich von der Ortsvariablen  $x$  und nicht von der Zeitvariablen  $t$  abhängt, und bei der rechten Seite verhält es sich genau umgekehrt. Dies bedeutet aber, dass beide Seiten der Identität (79.3) notwendigerweise konstant sein müssen, es gilt also

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -s^2 \text{ für } 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad (79.4)$$

mit einer noch zu spezifizierenden reellen Konstanten  $s > 0$ . Denkbar wäre hier auch, in (79.4) auch Konstanten  $s^2 \geq 0$  anstelle  $-s^2 < 0$  zuzulassen. Im Verlauf der weiteren Berechnungen stellt sich jedoch heraus, dass sich damit die Randbedingungen nicht erfüllen lassen. Daher kann man sich auch gleich auf positive Konstante  $s^2$  beschränken, wobei sich durch die Verwendung von  $s^2 > 0$  anstelle von  $s > 0$  im weiteren Verlauf

die Notation vereinfachen wird. Die Darstellung (79.4) führt unmittelbar auf die beiden Gleichungen

$$X''(x) + \left(\frac{s}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, \quad (79.5)$$

$$T'(t) + s^2 T(t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0. \quad (79.6)$$

Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung (79.5) gewinnt man durch einen *Exponentialansatz* (siehe Abschnitt 63 auf Seite 165 ff)

$$X(x) = e^{\lambda x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L \quad (79.7)$$

mit einem zu bestimmenden Koeffizienten  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Zweimalige Differenziation in (79.7) liefert

$$X''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L,$$

und die gewöhnliche Differenzialgleichung (79.5) für die gesuchte Funktion  $X$  nimmt dann die Form

$$[\lambda^2 + \left(\frac{s}{c}\right)^2] e^{\lambda x} = 0 \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, \quad (79.8)$$

an. Division in (79.8) durch den in jedem Fall von null verschiedenen Wert  $e^{\lambda x}$  führt auf die Bestimmungsgleichung  $\lambda^2 = -(s/c)^2$ , die eine Lösung

$$\lambda = i \frac{s}{c}$$

besitzt. Natürlich existiert noch eine zweite Lösung  $\lambda = -is/c$ , die letztlich jedoch auf keine weiteren reellwertigen Lösungen der betrachteten gewöhnlichen Differenzialgleichung (79.5) führt. Der Exponentialansatz (79.7) liefert also zu der gewöhnlichen Differenzialgleichung (79.5) die komplexwertige Lösung

$$X_s(x) = e^{i(s/c)x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L.$$

Gesucht sind jedoch reellwertige Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung (79.5). Diese erhält man durch Heranziehung des Real- und des Imaginärteils der Funktion  $X_s$

$$\operatorname{Re} X_s(x) = \cos\left(\frac{s}{c}x\right), \quad \operatorname{Im} X_s(x) = \sin\left(\frac{s}{c}x\right) \quad (79.9)$$

für  $0 \leq x \leq L$ . Diese Vorgehensweise ist allerdings nur deshalb zulässig, weil die in (79.5) auftretenden Koeffizienten reell sind.

Eine Lösung  $T$  der in (79.6) auf dieser Seite betrachteten gewöhnlichen Differenzialgleichung gewinnt man ebenfalls durch einen Exponentialansatz

$$T(t) = e^{\mu t} \quad \text{für } t \geq 0 \quad (79.10)$$

mit einem zu bestimmenden Parameter  $\mu \in \mathbb{R}$ . Einmalige Differenziation in (79.10) liefert

$$T'(t) = \mu e^{\mu t} \quad \text{für } t \geq 0,$$

und die gewöhnliche Differenzialgleichung (79.6) für die gesuchte Funktion  $T$  geht dann über in

$$(\mu + s^2)e^{\mu t} \quad \text{für } t \geq 0. \quad (79.11)$$

Division in (79.11) durch den in jedem Fall von null verschiedenen Wert  $e^{\mu t}$  führt auf die Lösung

$$\mu = -s^2. \quad (79.12)$$

Der Exponentialansatz (79.10) liefert also zu der gewöhnlichen Differenzialgleichung (79.6) für die gesuchte Funktion  $T$  die reellwertige Lösung

$$T_s(t) = e^{-s^2 t} \quad \text{für } t \geq 0.$$

Die so gewonnenen Lösungen der Diffusionsgleichung haben also die Form

$$\operatorname{Re} X_s(x) T_s(t) = \cos\left(\frac{s}{c}x\right) e^{-s^2 t}, \quad (79.13)$$

$$\operatorname{Im} X_s(x) T_s(t) = \sin\left(\frac{s}{c}x\right) e^{-s^2 t} \quad (79.14)$$

für  $0 \leq x \leq L$  und  $t \geq 0$ . Hier ist  $s > 0$  ein zunächst noch beliebiger Parameter. Eine Betrachtung des Falls  $s \leq 0$  ist dabei nicht erforderlich; er liefert keine weiteren relevanten Lösungen.

## 79.2 Anpassung an die Randbedingungen

In diesem Abschnitt werden diejenigen Werte des Parameters  $s$  für die Lösungen aus (79.9) und (79.10) auf dieser Seite bestimmt, für die die Nullrandbedingungen aus (79.1) auf der vorherigen Seite erfüllt sind. Wegen  $T_s(t) \neq 0$  für alle  $t \geq 0$  ist klar, dass man die Betrachtungen auf die Funktion  $X_s$  beschränken kann. Dabei kommt wegen  $\operatorname{Re} X_s(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$  nur der Imaginärteil  $\operatorname{Im} X_s$  in Frage. Hier ist in  $x = 0$  die Randbedingung stets erfüllt,

$$\operatorname{Im} X_s(0) = \sin 0 = 0.$$

In dem Punkt  $x = L$  führt die Randbedingung auf

$$\operatorname{Im} X_s(L) = \sin\left(\frac{s}{c}L\right) = 0,$$

was für  $sL/c \in \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$  erfüllt ist. Letzteres umformuliert bedeutet

$$s \in \left\{n \frac{c\pi}{L} : n = 1, 2, \dots\right\}.$$

Somit stellen die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} u_n(x, t) &:= \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-(nc\pi/L)^2 t} \\ &\text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0, n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (79.15)$$

jeweils Lösungen der Diffusionsgleichung dar, die zudem alle die Nullrandbedingungen aus (79.1) auf Seite 227 erfüllen.

### 79.3 Superposition - Anpassung an die Anfangsbedingung

Auf Grund der Linearität der vorliegenden Differenzialgleichung und der auftretenden Nullrandbedingungen sind endliche Linearkombinationen der Funktionen  $u_n$  für  $n = 1, 2, \dots$  ebenfalls Lösungen der betrachteten Differenzialgleichung, die zugleich wie gefordert an den beiden Rändern verschwinden. Es ist naheliegend, auch Funktionen von der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) e^{-(nc\pi/L)^2 t} \quad (79.16)$$

für  $0 \leq x \leq L, t \geq 0$

zu betrachten. Hierbei wird zunächst ohne weitere Diskussion Konvergenz der auftretenden Reihe sowie hinreichend gute Differenzierbarkeitseigenschaften der Grenzfunktion  $u$  angenommen.

Für  $t = 0$  erhält man dann aus dem Superpositionsansatz (79.16) an die Koeffizienten  $b_0, b_1, \dots$  die Bedingung

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \stackrel{!}{=} u_0(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L. \quad (79.17)$$

Die Betrachtungen über Fourier-Reihen im folgenden Abschnitt werden zeigen, dass die Anfangsbedingung (79.17) bei hinreichender Glattheit der Funktion  $u_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Setzung

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(y) \sin\left(n\frac{\pi}{L}y\right) dy, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (79.18)$$

erfüllt ist und damit die Funktion aus (79.16) auf dieser Seite die gesuchte Lösung des betrachteten Anfangs-Randwertproblems für die Diffusionsgleichung (siehe (79.1) auf Seite 227) liefert.

**Beispiel 79.1.** In einfachen Situationen kann man die Koeffizienten  $b_n$  in (79.17) direkt ablesen. Im Fall

$$u_0(x) = \sin\left(s\frac{\pi}{L}x\right) \text{ für } 0 \leq x \leq L$$

mit  $s \in \mathbb{N}$  ist (79.17) mit der Wahl  $b_s = 1$  und  $b_n = 0$  für  $n = 1, 2, \dots$  mit  $n \neq s$  erfüllt. Die Lösung des betrachteten Anfangs-Randwertproblems für die Diffusionsgleichung (siehe (79.1) auf Seite 227) ist damit in diesem Fall gemäß (79.15) auf dieser Seite von der einfachen Form

$$u(x, t) = \sin\left(s\frac{\pi}{L}x\right) e^{-(sc\pi/L)^2 t} \quad \text{für } 0 \leq x \leq L, t \geq 0.$$

Der räumliche Verlauf der Lösung ist in Abbildung 149 für die fünf Zeiten  $t = k \Delta t, k = 0, \dots, 4$  dargestellt, wobei  $\Delta t = 0,06$  gewählt ist. Die auftretenden Parameter sind hierbei  $L = c = s = 1$ . △

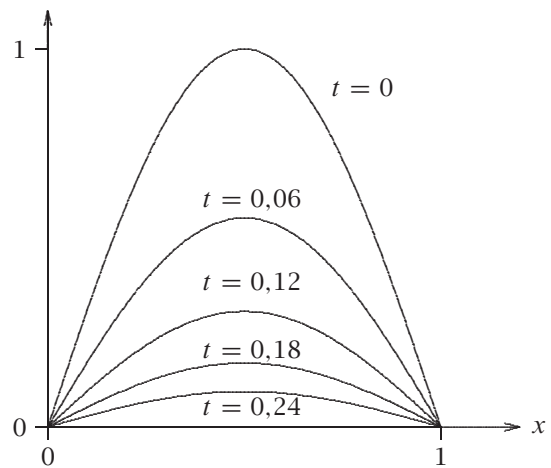


Abb. 149: Der räumliche Verlauf von  $u(\cdot, t)$  für fünf Zeiten  $t$ .

## 80 Einführung in die Theorie der Fourier-Reihen

Gegenstand des vorliegenden Abschnitts ist die Approximation reellwertiger Funktionen durch Überlagerung von Sinus- und Cosinus-Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen. Dies geschieht auf einem festgelegten Intervall, wobei die Länge des Intervalls bei periodischen Funktionen durch die Periodenlänge festgelegt ist.

Wir beginnen die Betrachtungen für das Intervall  $[-\pi, \pi]$ , für das die Darstellungen am einfachsten sind. Allgemeine Intervalle werden anschließend betrachtet.

## 80.1 Orthogonalität trigonometrischer Monome

Grundlage für die vorzustellende Theorie der Fourier-Reihen bilden die folgenden Orthogonalitätseigenschaften der trigonometrischen Monome. Die Bezeichnung Orthogonalität wird in Bemerkung 80.6 auf der nächsten Seite erläutert.

**Lemma 80.1.** *Es gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = 0, \quad n, m = 0, 1, \dots, n \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0, \quad \text{—————} \ll \text{—————}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx = 0 \quad \text{für } n, m = 0, 1, \dots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi \quad \text{für } n = 1, 2, \dots,$$

sowie trivialerweise  $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 0x \, dx = 2\pi$ .

Die Aussagen von Lemma 80.1 lassen sich mit Hilfe der folgenden Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen nachweisen.

**Lemma 80.2.** *Für  $u, v \in \mathbb{R}$  gelten die folgenden Identitäten:*

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) + \cos(u+v)), \quad (80.1)$$

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v)). \quad (80.2)$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u-v) + \sin(u+v)). \quad (80.3)$$

**BEWEIS.** Das bereits vorgestellte Additionstheorem  $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$  (siehe (18.6) auf Seite 40) angewendet mit  $-v$  anstelle  $v$  liefert  $\cos(u-v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$ . Eine Addition beziehungsweise Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt (80.1) beziehungsweise (80.2).

Das ebenfalls bereits vorgestellte Additionstheorem  $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$  (siehe (18.5) auf Seite 40) angewendet mit  $-v$  anstelle  $v$  liefert  $\sin(u-v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v$ . Eine Addition dieser beiden Gleichungen ergibt unmittelbar (80.3).  $\square$

Aus Lemma 80.2 erhält man unmittelbar die folgenden Additionstheoreme:

**Lemma 80.3.** *Für  $u \in \mathbb{R}$  gelten die folgenden Identitäten:*

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u), \quad (80.4)$$

$$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u), \quad (80.5)$$

$$\sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u. \quad (80.6)$$

**BEWEIS.** Das folgt direkt aus Lemma 80.2 angewendet mit  $v = u$ .  $\square$

**BEWEIS** (von Lemma 80.1). Wir befassen uns zunächst mit den ersten drei Identitäten und nehmen dazu  $n, m \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \neq m$  an. Das Additionstheorem (80.1) angewendet mit  $u = nx$  und  $v = mx$  ergibt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x) \, dx = 0 \end{aligned}$$

wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \frac{\sin kx}{k} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = 0 \quad (0 \neq k \in \mathbb{Z}). \quad (80.7)$$

Genauso liefert die Additionsregel (80.2) angewendet mit  $u = nx$  und  $v = mx$  die Identitäten

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+m)x) - \cos((n-m)x)) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Die dritte Identität in Lemma 80.1 erhält man aus Additionsregel (80.3) angewendet mit  $u = nx$  und  $v = mx$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx \, dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)) \, dx = 0 \end{aligned}$$

wegen  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Letzteres ergibt sich direkt durch Integration oder alternativ durch den Umstand, dass der Sinus ungerade bezüglich des Ursprungs ist.

Mit den Identitäten (80.4) und (80.5) angewendet mit  $u = nx$  erhält man schließlich

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos 2nx \, dx = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos 2nx \, dx = \pi,$$

wobei nochmals (80.7) verwendet wurde.  $\square$

## 80.2 Fourier-Reihen reeller Funktionen

Im Folgenden werden *Fourier-Reihen* eingeführt.

**Definition 80.4.** Die  $2\pi$ -periodische *Fourier-Reihe* einer integrierbaren Funktion  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt die Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

mit den *Fourier-Koeffizienten*

$$\left. \begin{aligned} a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ny \, dy, \\ b_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin ny \, dy, \end{aligned} \right\} \quad (80.8)$$

für  $n = 0, 1, \dots$ . Δ

Als Kurzschreibweise für die Fourier-Reihe der reellwertigen Funktion  $f$  wird die Notation

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (80.9)$$

verwendet. Dabei bedeutet das Symbol  $\sim$ , dass die Koeffizienten in (80.9) von der Form (80.8) sind.

**Bemerkung 80.5.** Wir nehmen für den Moment an, dass in (80.9) Gleichheit für alle  $x \in [-\pi, \pi]$  vorliegt. Dann liefert dies eine Darstellung von  $f$  als Superposition harmonischer Schwingungen, wobei deren Frequenzen mit wachsendem  $n$  zunehmen: es besitzt dabei der  $n$ -te Summand die Periodendauer  $\frac{2\pi}{n}$  beziehungsweise die Frequenz  $n/2\pi$ . Man beachte, dass diese Perioden  $\frac{2\pi}{n}$  jeweils Teiler von  $2\pi$  beziehungsweise die auftretenden Frequenzen  $\frac{n}{2\pi}$  alle Vielfache von  $\frac{1}{2\pi}$  sind.

Die Fourier-Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  sind dabei (vorzeichenbehaftete) *Amplituden*. Die Größen ihrer Beträge legen fest, zu welchen Anteilen die entsprechenden harmonischen Schwingungen in  $f$  vertreten sind.

Darstellungen der Funktionen  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , und  $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  werden in Abbildung 17 auf Seite 39 präsentiert. In den Abbildungen 150 und 151 finden Sie Darstellungen für  $\sin(2x)$ ,  $\cos(2x)$  und  $\sin(3x)$ ,  $\cos(3x)$ . Δ

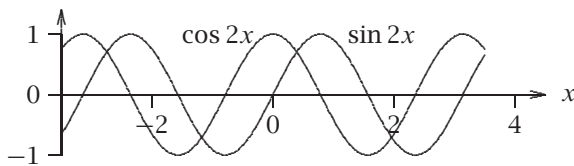


Abb. 150: Darstellung von  $\sin 2x$  und  $\cos 2x$  für  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

**Bemerkung 80.6.** a) Die rechte Seite von (80.9) ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion. Daher wird die Fourier-Entwicklung (80.9) häufig für  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet.

b) Anwendung finden Fourier-Reihen - neben der technischen Anwendung zur Lösung partieller Differentialgleichungen - z.B. in der Spektralanalyse und der Datenkompression.

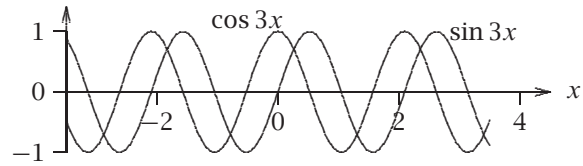


Abb. 151: Darstellung von  $\sin 3x$  und  $\cos 3x$  für  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

c) Bei (80.9) handelt es sich tatsächlich um eine Fourier-Entwicklung im Sinne von Satz 33.3 auf Seite 81. Der zugrunde liegende Vektorraum  $\mathcal{V}$  ist hier - etwas vereinfacht formuliert - der Raum der integrierbaren Funktionen  $f$ . Auf diesem Funktionenraum  $\mathcal{V}$  betrachtet man das Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$ . Das Funktionensystem  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \dots$  bildet hierfür ein (unendliches) Orthonormalsystem, wobei sich die paarweise Orthogonalität direkt aus Satz 80.3 auf der vorherigen Seite ergibt. Δ

Als Vorbereitung für die nachfolgende Bemerkung stellen wir noch eine Definition vor.

**Definition 80.7.** Für Parameter  $t, s \in \mathbb{R}$  nennt man

$$\delta_{ts} = \begin{cases} 1 & \text{für } t = s, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

das *Kronecker-Symbol*.

**Bemerkung 80.8.** Die Setzungen (80.8) für die Fourier-Koeffizienten sind vernünftig. Hierzu nehmen wir an, dass mit *irgendwelchen* reellen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  in (80.9) Gleichheit vorliegt, d.h.  $\sim$  dort durch  $=$  ersetzt werden kann. Darüberhinaus soll nach einer Integration der rechten Seite Integration und Summation vertauschbar sein. In dieser Situation gelten auf Grund der in Lemma 80.1 auf Seite 230 vorgestellten Orthogonalitätsbeziehungen notwendigerweise die Identitäten (80.8). Das erhält man für die Koeffizienten  $a_n$  folgendermaßen,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos ny \, dy \\ &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos ny \, dy}_{2\pi\delta_{0n}} = \pi\delta_{mn} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos my \cdot \cos ny \, dy}_{=0} \\ &+ b_m \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin my \cdot \cos ny \, dy}_{=0}] \\ &= \pi a_n. \end{aligned}$$