

Definition 76.1. Eine stetige Abbildung $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $d = 2$ oder $d = 3$ sowie $\mathcal{D}_T \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *Koordinatentransformation*, falls es zwei Mengen $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{D}_T$ und $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- a) es sind \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 beide offen und wegzusammenhängend,
- b) es unterscheidet sich \mathcal{O}_2 nur durch eine Nullmenge vom gesamten Raum \mathbb{R}^d , d. h. für eine Nullmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt $\mathcal{O}_2 \cup \mathcal{N} = \mathbb{R}^d$,
- c) die Einschränkung $T : \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ ist umkehrbar und stetig differenzierbar, mit $\det T'(\vec{y}) \neq 0$ für jedes $\vec{y} \in \mathcal{O}_1$. Δ

Beispiel 76.2 (elliptische Koordinaten). Die Koordinaten von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lassen sich in der Form

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \varphi, \\ y &= br \sin \varphi, \end{aligned}$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, darstellen, wobei $a > 0$ und $b > 0$ gewisse Konstanten sind. Im Spezialfall $a = b = 1$ handelt es sich dabei gerade um die Polarkoordinatendarstellung.

Wir betrachten die zu dieser Koordinatentransformation gehörende Abbildung $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_T := \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ und der Abbildungsvorschrift

$$T(r, \varphi) = (ar \cos \varphi, br \sin \varphi), \tag{76.1}$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ genauer. Grafische Illustrationen dazu finden Sie in den Abbildungen 141 und 142. Man beachte, dass sich in Abbildung 141 der eingezeichnete Winkel φ für $a \neq b$ von dem Polarkoordinatenwinkel zwischen $T(r, \varphi)$ und der x -Achse unterscheidet.

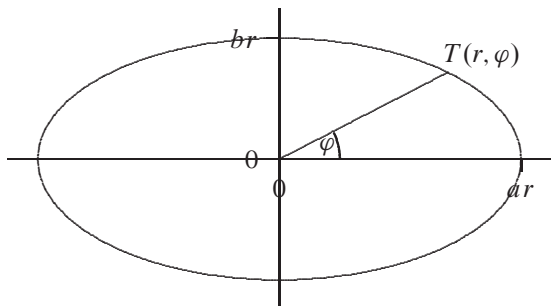


Abb. 141: Darstellung von $T(r, \varphi)$

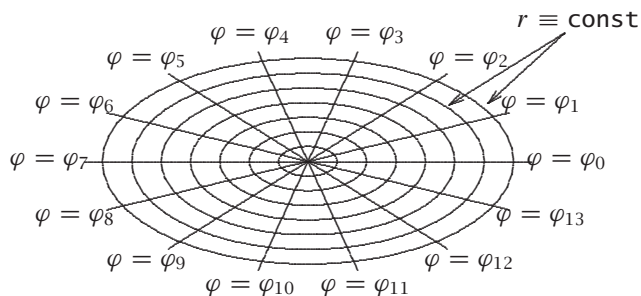


Abb. 142: Darstellung elliptischer Koordinaten, mit $\varphi_k = 2\pi k/14$ für $k = 0, 1, \dots, 13$

Die Koordinatentransformation $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus (76.1) ist stetig partiell differenzierbar, mit

$$T'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -ar \sin \varphi \\ b \sin \varphi & br \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\det T'(r, \varphi) = abr \cos^2 \varphi + abr \sin^2 \varphi = abr,$$

für $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Diese Transformation erfüllt die Bedingungen aus Definition 76.1 mit den beiden Mengen

$$\mathcal{O}_1 = \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) = \{(r, \varphi) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

$$\mathcal{O}_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}.$$

Man beachte, dass die Halbgerade $\{(x, 0) \mid x \geq 0\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^2 darstellt.

Elliptische Koordinaten eignen sich z. B. zur Parametrisierung von achsenparallelen Ellipsen mit den Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ und dem Ursprung als Mittelpunkt. Diese sind von der Form

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

(vergleiche Beispiel 73.8 auf Seite 212). Mit der Transformation T aus (76.1) gilt die Identität

$$T(\mathcal{E}') = \mathcal{E},$$

wobei

$$\mathcal{E}' = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$= \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Δ

Beispiel 76.3 (Zylinderkoordinaten). Die kartesischen Koordinaten von Elementen $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ des Raums

lassen sich in der Form

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (76.2)$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$, darstellen. Die Situation ist in Abbildung 143 dargestellt.

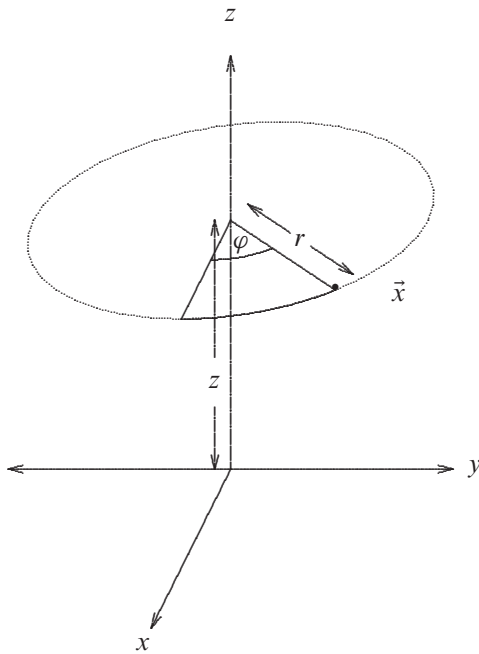


Abb. 143: Zylinderkoordinaten

Wir betrachten die zu dieser Koordinatentransformation gehörende Abbildung $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_T := \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ und der Abbildungsvorschrift

$$T(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \quad (76.3)$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $z \in \mathbb{R}$ genauer. Sie ist stetig differenzierbar, mit

$$T'(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det T'(r, \varphi, z) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r,$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $z \in \mathbb{R}$. Die Determinante der Ableitungsmatrix $T'(r, \varphi, z)$ berechnet man z.B.

durch Entwicklung nach der letzten Zeile oder der letzten Spalte. Diese Koordinatentransformation erfüllt die Bedingungen aus Definition 76.1 auf Seite 219 z.B. für

$$\mathcal{O}_1 = \{(r, \varphi, z) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{O}_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

Man beachte, dass die Halbebene $\{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^3 darstellt.

Zylinderkoordinaten eignen sich z. B. zur Parametrisierung von Zylindern, deren Achse mit der z -Achse übereinstimmt und deren Grundfläche kreisförmig ist. Beispielsweise gilt für den Zylinder

$$\mathcal{Z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, a \leq z \leq b\}$$

(vergleiche Beispiel 73.8 auf Seite 212) mit der Transformation T aus (89.3) die Identität

$$T(\mathcal{Z}') = \mathcal{Z},$$

wobei

$$\mathcal{Z}' = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [a, b]$$

$$= \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a \leq z \leq b\}.$$

Allgemeiner lassen sich mit Zylinderkoordinaten auch vertikale Rotationskörper wie Kegel, Trichter oder Paraboloid parametrisieren, wobei sich für die dazugehörigen Zylinderkoordinatenbereiche jeweils Normalbereiche ergeben. Δ

Beispiel 76.4 (Kugelkoordinaten). Die kartesischen Koordinaten von Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lassen sich in der Form

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \delta \\ y &= r \sin \varphi \cos \delta \\ z &= r \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (76.4)$$

mit $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ darstellen. Dabei gilt Folgendes:

a) Es ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, wie man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \left(\underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} \cos^2 \delta + \sin^2 \delta \right) \\ &= r^2 \underbrace{(\cos^2 \delta + \sin^2 \delta)}_{=1} = r^2. \end{aligned}$$

Es ist also r der Abstand des Punktes (x, y, z) zum Ursprung des kartesischen Koordinatensystems. Bei festem $r > 0$ werden durch (76.4) Punkte auf der Kugeloberfläche mit Radius r um den Ursprung des kartesischen Koordinatensystems beschrieben.

b) In der Polarkoordinatendarstellung

$$x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi$$

mit $\varrho = \varrho(\delta) := r \cos \delta \geq 0$

gibt der Winkel $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ den Winkel zwischen dem Vektor (x, y) und der x -Achse an. Der Winkel φ ist demnach ein Maß für die geografische Länge.

c) Das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(x, y, 0)$ und (x, y, z) bildet ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Höhe $z = r \sin \delta$ ist und deren Hypotenuse die Länge r besitzt. Es bildet daher die Zahl $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ den Winkel im Bogenmaß zwischen den Vektoren (x, y, z) und $(x, y, 0)$, die damit ein Maß für die geografische Breite darstellt. Dabei stehen die Werte $\delta = \frac{\pi}{2}$ und $\delta = -\frac{\pi}{2}$ für Nord- beziehungsweise Südpol, und $\delta = 0$ repräsentiert den Äquator.

Die Situation ist in Abbildung 144 dargestellt.

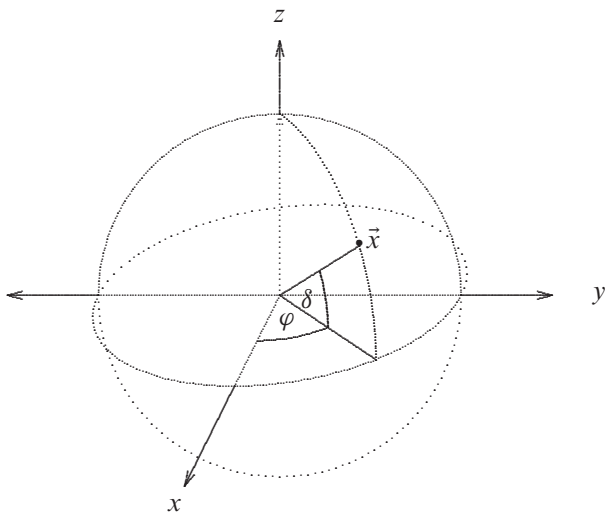


Abb. 144: Kugelkoordinaten

Wir betrachten nun die Längen- und Breitenkreise:

(i) Für feste Werte von r und δ wird für Werte $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ein Kreis beschrieben, der

- auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ verläuft,
- und dabei in einer Ebene liegt, die parallel x - y -Ebene auf der geografischen Breite δ verläuft,
- dessen Mittelpunkt $(0, 0, z)$ ist,
- und dessen Radius $r \cos \delta$ ist (siehe Teil b oben).

(ii) Für feste Werte von r und φ wird für Werte $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ ein Halbkreis beschrieben, der

- auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ verläuft,
- und dabei in einer Ebene liegt, die durch die geografische Länge φ festgelegt ist und durch den Ursprung verläuft.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch angegeben, wie die Kugelkoordinaten eines Punktes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ bestimmt werden können:

- Für den Radius r gilt $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
- für den Breitengrad δ gilt $\delta = \arcsin(\frac{z}{r})$,
- und den Längengrad φ erhält man aus der Polarkoordinatendarstellung $x = \varrho \cos \varphi, y = \varrho \sin \varphi$ des Punktes (x, y) , wobei $\varrho = \sqrt{r^2 - z^2} = r \cos \delta$ gilt. Δ

Beispiel 76.5 (Kugelkoordinaten, Teil 2). Wir betrachten die zu dieser Koordinatentransformation gehörende Abbildung $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit dem Definitionsbereich $\mathcal{D}_T := \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und der Abbildungsvorschrift

$$T(r, \varphi, \delta) = (r \cos \varphi \cos \delta, r \sin \varphi \cos \delta, r \sin \delta), \quad (76.5)$$

mit $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Sie ist stetig partiell differenzierbar, mit

$$T'(r, \varphi, \delta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \delta & -r \sin \varphi \cos \delta & -r \cos \varphi \sin \delta \\ \sin \varphi \cos \delta & r \cos \varphi \cos \delta & -r \sin \varphi \sin \delta \\ \sin \delta & 0 & r \cos \delta \end{pmatrix},$$

$$\det T'(r, \varphi, \delta) = r^2 \cos \delta,$$

für $r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $-\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$. Diese Transformation erfüllt die Bedingungen aus Definition 76.1 auf Seite 219 für

$$\mathcal{O}_1 = \{(r, \varphi, \delta) \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{\pi}{2}\},$$

$$\mathcal{O}_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

Kugelkoordinaten eignen sich beispielsweise zur Parametrisierung von Kugeln mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Diese sind von der Form

$$\mathcal{B} = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Mit der Transformation T aus (76.1) gilt die Identität

$$T(\mathcal{B}') = \mathcal{B},$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= [0, R] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \left\{ (r, \varphi, \delta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned} \quad \Delta$$

Man beachte noch, dass es sich bei allen vorgestellten Beispielen um Transformationen in kartesische Koordinaten handelt.

76.2 Transformationssatz

Es wird nun der Transformationssatz zur Berechnung von Integralen vorgestellt. Diese Integrationsregel stellt - wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts erwähnt - ein Analogon zur Substitutionsregel für Integrale von Funktionen einer Veränderlichen dar. Anders als im eindimensionalen Fall geht es hier jedoch auch darum, den Integrationsbereich durch eine geeignete Transformation zu vereinfachen.

Satz 76.6 (Transformationssatz für mehrdimensionale Integrale). *Mit den Bezeichnungen aus Definition 76.1 auf Seite 219 gilt für jeden zulässigen Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ und jede stetige Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ die Identität*

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{D}'} f(T(\vec{u})) |\det T'(\vec{u})| d\vec{u}. \quad (76.6)$$

Hierbei ist $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}_T$ eine Menge mit $T(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$.

BEWEIS. Der Beweis wird hier nicht geführt; siehe aber die nachfolgende Bemerkung. \square

Bemerkung. Im Folgenden wird eine heuristische Herleitung der Identität (76.6) für den Fall eines achsenparallelen zweidimensionalen Rechtecks

$$\mathcal{D}' = [a, b] \times [c, d] = \{ (u, v) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d \}$$

geliefert. Hierzu wird eine Zerlegung von \mathcal{D}' in Teilrechtecke

$$\mathcal{D}'_{ij} := [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j], \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n, \\ j &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

vorgenommen, wobei die Gitterpunkte äquidistant gewählt seien:

$$u_i = a + i \Delta u, \quad v_j = b + j \Delta v, \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n, \\ j &= 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

mit Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ und

$$\Delta u = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta v = \frac{d-c}{m}.$$

Wir betrachten dann

$$\vec{\mathcal{D}}_{ij} := T(\mathcal{D}'_{ij}), \quad \vec{x}_{ij} := T(u_i, v_j), \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, n, \\ j &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Die Situation ist in Abbildung 145 am Beispiel zweidimensionaler elliptischer Koordinaten dargestellt.

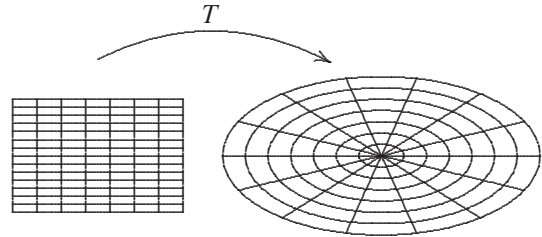


Abb. 145: Zerlegung eines Bereiches bezüglich zweier Koordinatensysteme am Beispiel zweidimensionaler elliptischer Koordinaten

Nun gilt für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ fest Folgendes:

- es ist die Fläche $\mu(\mathcal{D}_{ij})$ klein und stimmt damit näherungsweise mit dem von den beiden Vektoren $T(u_{i-1}, v_j) - T(u_i, v_j)$ und $T(u_i, v_{j-1}) - T(u_i, v_j)$ aufgespannten Parallelogramm überein;
- für diese beiden Vektoren gilt näherungsweise

$$T(u_{i-1}, v_j) - T(u_i, v_j) \approx -\Delta u \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial T_2}{\partial u}(u_i, v_j) \end{pmatrix} =: \vec{x},$$

$$T(u_i, v_{j-1}) - T(u_i, v_j) \approx -\Delta v \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial v}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial T_2}{\partial v}(u_i, v_j) \end{pmatrix} =: \vec{y}.$$

Die Situation ist in Abbildung 146 dargestellt.

Damit stimmt die Fläche $\mu(\mathcal{D}_{ij})$ näherungsweise mit dem von den beiden Vektoren

$$\vec{x} = -\Delta u \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial u}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial T_2}{\partial u}(u_i, v_j) \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = -\Delta v \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial v}(u_i, v_j) \\ \frac{\partial T_2}{\partial v}(u_i, v_j) \end{pmatrix}$$

aufgespannten Parallelogramm überein.

- Die Fläche des von zwei Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich $|\det(\vec{x} \ \vec{y})|$ (siehe Beispiel 39.3 auf Seite 102). Damit gilt

$$\mu(\mathcal{D}_{ij}) \approx |\det(\vec{x} \ \vec{y})| = |\det T'(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v.$$

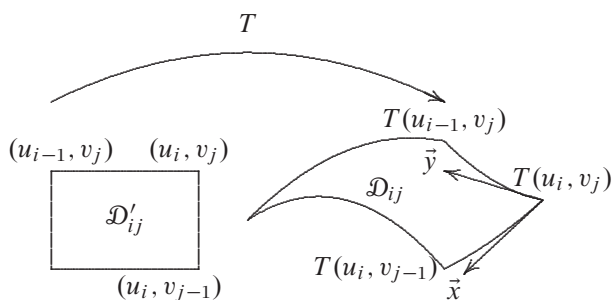


Abb. 146: Transformation eines kleinen Rechteckbereiches

Daraus resultiert schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} &\stackrel{(*_1)}{\approx} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\vec{x}_{ij}) \mu(\mathcal{D}_{ij}) \\ &\stackrel{(*_2)}{\approx} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(T(u_i, v_j)) |\det T'(u_i, v_j)| \Delta u \Delta v \\ &\stackrel{(*_3)}{\approx} \int_{\mathcal{D}'} f(T(\vec{u})) |\det T'(\vec{u})| d\vec{u}. \end{aligned}$$

Dabei stellt der Ausdruck rechts von $(*_1)$ eine riemannsche Summe zur Approximation des Integrals links von $(*_1)$ dar, wobei es letztlich unerheblich ist, dass die Mengen $\mu(\mathcal{D}_{ij})$ keine Rechteckbereiche darstellen. Analog ist der Ausdruck links von $(*_3)$ eine riemannsche Summe zur Approximation des Integrals rechts von $(*_3)$.

Im dreidimensionalen Fall ist die heuristische Herleitung der Gültigkeit des Transformationssatzes ganz analog. Man hat nur zu berücksichtigen, dass das Volumen eines von drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Spats durch $|\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})|$ gegeben ist (siehe Seite 109). Δ

Beispiel (Ellipse). Für eine achsenparallele Ellipse \mathcal{E} mit den Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ (siehe Beispiel 76.2) ergibt sich mit der in Beispiel 76.2 betrachteten Koordinatentransformation nach (76.6) die Identität

$$\int_{\mathcal{E}} f(\vec{x}) d\vec{x} = ab \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(ar \cos \varphi, br \sin \varphi) r d\varphi dr.$$

Insbesondere ergibt sich daraus für den Flächeninhalt dieser Ellipse (hier wählt man $f = 1$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} 1 d\vec{x} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr d\varphi dr = ab \int_0^1 2\pi r dr \\ &= ab\pi r^2 \Big|_{r=0}^1 = ab\pi. \end{aligned}$$

Dieser Wert wurde bereits in Beispiel 72.11 auf Seite 207 berechnet. Die hier vorgestellte Vorgehensweise unter Anwendung einer geeigneten Koordinatentransformation ist allerdings deutlich einfacher. Die Flächeninhalte von Sektoren von Ellipsen lassen sich so ebenfalls leicht berechnen. Δ

Beispiel. Wir betrachten nun Rotationskörper der Form

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, \sqrt{x^2 + y^2} \leq r(z)\}$$

mit einer nichtnegativen stetigen Funktion $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Spezialfälle wurden bereits in Beispiel 73.10 auf Seite 212 betrachtet. Für Zylinderkoordinaten und die dazugehörige Transformation (siehe (76.2) und (76.3) auf Seite 220) gilt dann für die Menge

$$\mathcal{D}' = \{(r, \varphi, z) \mid a \leq z \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq r(z)\}$$

die Identität $T(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$. Anwendung des Transformationssatzes ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_{\mathcal{D}'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz \\ &= \int_a^b \int_0^{r(z)} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r d\varphi dr dz. \end{aligned}$$

Für das Volumen des Rotationskörpers \mathcal{D} ergibt sich daraus (man setzt hier $f = 1$).

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{\mathcal{D}} 1 d\vec{x} = 2\pi \int_a^b \int_0^{r(z)} r dr dz \\ &= 2\pi \int_a^b \frac{r^2}{2} \Big|_{r=0}^{r=r(z)} dz = \pi \int_a^b r(z)^2 dz. \end{aligned} \quad \Delta$$

Lernziele für diesen Abschnitt VIII

- Sie sollten
- Integrale über ebene und räumliche achsenparallele Integrationsbereiche berechnen können,
 - ebene und räumliche Normalbereiche identifizieren und die Integrationsgrenzen für die dazugehörigen Doppel- beziehungsweise Dreifachintegrale formulieren können,
 - Flächen- und Rauminhalte berechnen können,
 - die in diesem Abschnitt vorgestellten elliptischen Koordinaten sowie Kugel- und Zylinderkoordinaten kennen,
 - den Transformationssatz kennen und auf jede relevante Koordinatentransformation anwenden können.