

Definition 73.5. Eine beschränkte Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *zulässiger Integrationsbereich*, falls das Integral

$$\mu(\mathcal{D}) := \int_{\mathcal{D}} 1 \, d\vec{x} \quad (73.13)$$

existiert. Den Wert (74.13) nennt man das *Volumen* der Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$. Δ

Bemerkung 73.6. a) Eine beschränkte Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist also genau dann zulässiger Integrationsbereich, wenn die Einsfunktion $1 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto 1$, integrierbar ist.

b) Eine Betrachtung des Ansatzes über die riemannschen Summen (siehe (74.7) und (74.8) auf der vorherigen Seite) zeigt, dass die Setzung $\int_{\mathcal{D}} 1 \, d\vec{x}$ als Volumen plausibel ist. Δ

73.4 Berechnung räumlicher Bereichsintegrale mittels Dreifachintegration

Für viele Integrationsbereiche $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ lässt sich die Integration einer Funktion von drei Variablen durch die Hintereinanderausführung von Integrationen geeigneter eindimensionaler Integrationen bewerkstelligen.

73.4.1 Achsenparallele quaderförmige Integrationsbereiche

Der einfachste Fall liegt bei achsenparallelen quaderförmigen Integrationsbereichen vor:

Satz 73.7 (Achsenparallele Quader). *Es sei die Funktion $f : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, mit $\mathcal{Q} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{Q}} f(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \quad (73.14)$$

$$= \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (73.15)$$

wobei noch angenommen wird, dass alle betrachteten Integrale existieren.

BEWEIS. Wird hier nicht geführt. \square

Bemerkung. a) In (74.14) geht man praktisch so vor:

- Man berechnet zunächst das innere Integral. Das liefert eine von x und y abhängige Funktion $F(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) \, dz$.
- Anschließend hat man dann das mittlere Integral $G(x) = \int_{a_2}^{b_2} F(x, y) \, dy$ zu berechnen, das eine von x abhängige Funktion liefert.

- Im letzten Schritt ist dann noch das äußere Integral $\int_{a_1}^{b_1} G(x) \, dx$ zu berechnen.

b) Die beiden Identitäten (74.14) und (74.15) bedeuten, dass bei der Integration einer Funktion von drei Veränderlichen mittels Dreifachintegralen die Integrationsreihenfolge geändert werden kann. Es sind dabei noch vier weitere Integrationsreihenfolgen möglich, die man durch Permutation von dx , dy und dz bei entsprechender Anpassung der Integrationsgrenzen erhält. Δ

Beispiel. Wir betrachten hier die Funktion $f(x, y, z) = x$. Diese Funktion ist also konstant auf jeder Ebene, die parallel zur y - z -Ebene verläuft. Sie wird über den Quader

$$\mathcal{Q} = [-1, 1] \times [0, 1] \times [0, 3]$$

$$= \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Anwendung von (74.15) ergibt mit der Notation $\vec{x} = (x, y, z)$ Folgendes:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}} x \, d\vec{x} &= \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^3 x \, dz \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \int_0^1 3x \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 3x \, dx = 3 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0. \end{aligned} \quad \Delta$$

73.4.2 Räumliche Normalbereiche

Einführung. Wir betrachten im Folgenden räumliche Normalbereiche $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$. Eine erste Variante sieht so aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} := \{(x, y, z) \mid a \leq z \leq b, g_1(z) \leq y \leq g_2(z), \\ h_1(y, z) \leq x \leq h_2(y, z)\}, \end{aligned} \quad (73.16)$$

mit stetigen Funktionen $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h_1, h_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{E} = \{(y, z) \mid a \leq z \leq b, g_1(z) \leq y \leq g_2(z)\}$ sowie $g_1 \leq g_2$ und $h_1 \leq h_2$ gelte.

Rotationskörper. Wir betrachten als Spezialfall von (74.16) Rotationskörper $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ entlang der z -Achse. Diese besitzen die allgemeine Form

$$\mathcal{D} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, \sqrt{x^2 + y^2} \leq r(z)\}, \quad (73.17)$$

mit einer stetigen nichtnegativen Funktion $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Es ist die Menge \mathcal{D} in (74.17) tatsächlich von der

Form (74.16), denn offenbar gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, |y| \leq r(z), \\ &\quad |x| \leq \sqrt{r(z)^2 - y^2} \} \\ &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b, -r(z) \leq y \leq r(z), \\ &\quad -\sqrt{r(z)^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{r(z)^2 - y^2} \}. \end{aligned}$$

Beispiel 73.8 (Zylinder). Wir betrachten einen senkrechten Zylinder $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^3$ der Höhe $h > 0$, dessen Achse mit der z -Achse übereinstimmt und deren oberen und unteren Begrenzungsflächen jeweils Kreisflächen mit dem Radius $r > 0$ bilden. Es gilt damit

$$\mathcal{Z} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, a \leq z \leq b \}.$$

Das ist ein Rotationskörper von der Form (74.17) mit $r(z) = r$, der Radius $r(z)$ hängt hier also nicht von z ab. Die Situation ist in Abbildung 131 dargestellt.

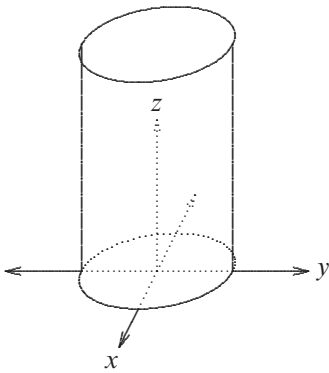


Abb. 131: Zylinder $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^3$

△

Beispiel 73.9 (Kugel). Eine (abgeschlossene) Kugel $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Radius $r > 0$ um den Ursprung ist von der Form

$$\mathcal{B} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}.$$

Das ist ein Rotationskörper von der Form (74.17) mit $r(z) = \sqrt{r^2 - z^2}$ für $-r \leq z \leq r$. Die Situation ist in Abbildung 132 dargestellt.

△

Beispiel 73.10 (Kegel, Paraboloid, Trichter). Wir betrachten nun Rotationskörper der Form

$$\mathcal{D} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varrho(z/h)^p \} \tag{73.18}$$

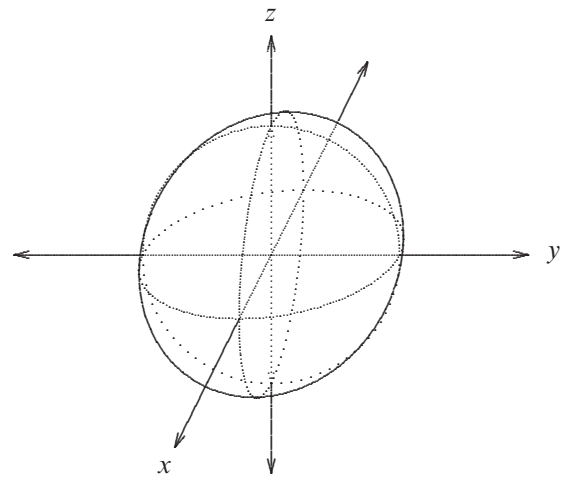


Abb. 132: Kugel $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$

mit positiven reellen Konstanten h, ϱ und p . Das ist offenbar ein Rotationskörper von der Form (74.17) mit $r(z) = \varrho(z/h)^p$. Geometrisch beschreibt das einen Körper mit einer senkrechten Längsachse, der nach unten hin durch eine Spitze im Ursprung und nach oben hin durch eine Kreisfläche mit dem Radius $\varrho > 0$ begrenzt wird. Die Form der Mantelfläche hängt von der Wahl des Parameters p ab. Wir unterscheiden für p drei Fälle (zur Veranschaulichung der Abhängigkeit des Verlaufs der Randkurven vom Parameter p setze man jeweils $h = 1, \varrho = 1$ und betrachte für x den Spezialfall $x = 0$; Auflösen nach z liefert dann $z = |y|^{1/p}$):

a) Im Fall $p = 1$ verläuft die Mantellinie geradlinig, es ergibt sich ein umgedrehter Kegel. Die Situation ist in Abbildung 133 dargestellt.

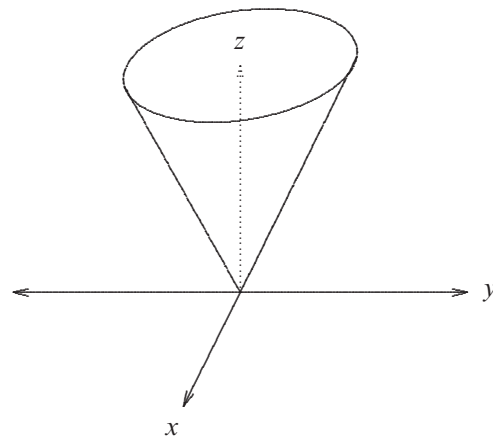


Abb. 133: Umgedrehter Kegel

b) Im Fall $p < 1$ nimmt die Mantellinie den Verlauf einer konvexen Funktion an, es ergibt sich ein umgekehrter Paraboloid. Die Situation ist für den Fall $p = 1/2$ in Abbildung 134 dargestellt.

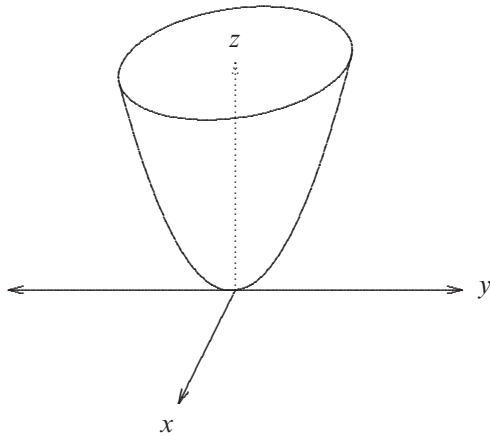


Abb. 134: Umgedrehter Paraboloid

c) Im Fall $p > 1$ verläuft die Mantellinie konkav, es ergibt sich ein umgekehrter Trichter. Die Situation ist für $p = 2$ in Abbildung 135 dargestellt.

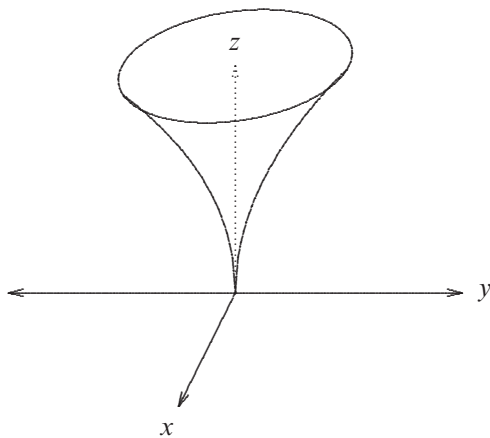


Abb. 135: Umgedrehter Trichter

$(x, y, h - z)$, so bewirkt dies zunächst eine Spiegelung des betrachteten Körpers im Ursprung sowie eine anschließende Verschiebung nach oben um den Wert $h > 0$. Geometrisch bewirkt dies ein Umdrehen der betrachteten Rotationskörper. Es handelt sich also um einen Körper mit einer senkrechten Längsachse, der nach oben hin spitz zuläuft und nach unten hin durch eine Kreisfläche mit dem Radius $\varrho > 0$ begrenzt wird. Diese Menge besitzt demnach die Darstellung

$$\mathcal{D} = \{(x, y, h - z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varrho(z/h)^p\}$$

mit reellen Konstanten $h > 0, \varrho > 0$ und $p > 0$. Eine anschließende Rücksubstitution $z \mapsto h - z$ liefert für diese Menge die Darstellung

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq h, \sqrt{x^2 + y^2} \leq \varrho(1 - z/h)^p\}. \tag{73.19}$$

Das ist ebenfalls ein Rotationskörper von der Form (74.17), in diesem Fall mit $r(z) = \varrho(1 - z/h)^p$. Die Form der Mantelfläche hängt weiterhin von dem Parameter p ab. Die Situation ist in den Abbildungen 136, 137 und 138 dargestellt. Δ

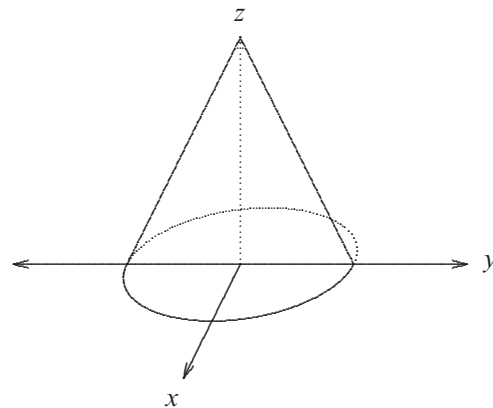


Abb. 136: Kegel

Δ

Beispiel 73.11 (Kegel, Paraboloid, Trichter, Teil 2). Ersetzt man in der Menge (74.18) die Variable (x, y, z) zunächst durch $(x, y, -z)$ und anschließend durch

73.4.3 Integration über räumliche Normalbereiche

Die Integration von Funktionen über räumliche Normalbereiche der Form (74.16) auf Seite 202 lässt sich

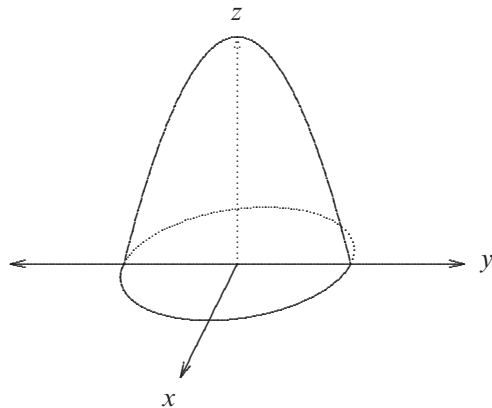


Abb. 137: Paraboloid

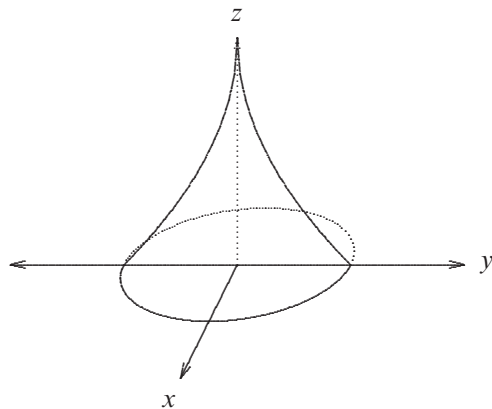


Abb. 138: Trichter

auf die Hintereinanderausführung von drei eindimensionalen Integrationen zurückführen.

Satz 73.12. Für einen Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ der Form (74.16) und eine stetige Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_a^b \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (73.20)$$

BEWEIS. Wird hier nicht geführt. □

Beispiel. Wir berechnen das Volumen eines zylindrischen Körpers $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^3$ in z -Richtung mit dem Einheitskreis in x - y -Richtung, und Boden und Deckel seien durch $z = 0$ beziehungsweise $z = 3$ begrenzt, d. h.

$$\mathcal{Z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Anwendung von (74.20) ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Z}} 1 d\vec{x} &= \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dx dy dz \\ &= 2 \int_0^3 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy dz = 6 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy \\ &\stackrel{(*)}{=} 3(\sqrt{1-y^2}y + \arcsin y) \Big|_{y=-1}^{y=1} = 3\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Hierbei resultiert die Identität (*) aus der Substitutionsregel für die eindimensionale Integration (siehe Abschnitt IV).

In Abschnitt 77 auf Seite 209 wird mit dem Transformationssatz eine Methode vorgestellt, mit der sich diese Integration (und auch viele andere) vereinfachen lässt. △

73.4.4 Varianten

Varianten des in (74.16) auf Seite 202 betrachteten Normalbereichs erhält man durch Permutation der Variablen x , y und z . Eine mögliche Version ist

$$\mathcal{D} := \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\} \quad (73.21)$$

mit stetigen Funktionen $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h_1, h_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\mathcal{E} = \{(y, z) \mid a \leq z \leq b, g_1(z) \leq y \leq g_2(z)\}$ gelte. Satz 74.12 behält hier - nach einer entsprechenden Modifikation der Integrationsreihenfolge - seine Gültigkeit.

74 Integrationstheorie

Wir stellen im Folgenden einige elementare allgemeine Integrationsregeln vor, wobei auf die Beweise in der Regel verzichtet wird. Es bezeichne dabei immer $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ einen zulässigen Integrationsbereich, mit $d = 2$ oder $d = 3$.

74.1 Klassen integrierbarer Funktionen

Die weitaus meisten Funktionen $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sind tatsächlich integrierbar. Insbesondere gehören dazu die in dem folgenden Theorem genannten Funktionen.

Satz 74.1. Jede stetige Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem zulässigen Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ ist integrierbar.

74.2 Linearität und Monotonie des Integrals

Satz 74.2 (Linearität des Integrals). Für zwei integrierbare Funktionen $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch die Linearkombination $\lambda f + \mu g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathcal{D}} \alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x}) d\vec{x} = \alpha \int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} + \beta \int_{\mathcal{D}} g(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{74.1}$$

BEWEIS. Der Beweis ist einfach, wird hier jedoch nicht geführt. \square

Damit gilt insbesondere auch $\int_{\mathcal{D}} \varrho d\vec{x} = \varrho \mu(\mathcal{D})$ für jede Konstante $\varrho \in \mathbb{R}$.

Satz 74.3 (Monotonie des Integrals, Schranken).

a) Für zwei integrierbare Funktionen $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f \leq g$ gilt

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} \leq \int_{\mathcal{D}} g(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{74.2}$$

b) Für eine integrierbare Funktion $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $c_1 \leq h(\vec{x}) \leq c_2$ für jedes $\vec{x} \in \mathcal{D}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Dann gilt

$$c_1 \mu(\mathcal{D}) \leq \int_{\mathcal{D}} h(\vec{x}) d\vec{x} \leq c_2 \mu(\mathcal{D}).$$

BEWEIS. a) Das ergibt sich unmittelbar aus Definition des Integrals. Wir erläutern das kurz für den zweidimensionalen Fall (der dreidimensionale Fall ergibt sich analog). Man hat nur zu beachten, dass zu jeder Zerlegung (73.3) eines Rechtecks $[a, b] \times [c, d] \supseteq \mathcal{D}$ die zur Funktion f gehörende riemannsche Summe $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta)$ kleiner gleich der zur Funktion g gehörenden riemannschen Summe $\mathcal{R}(g, \mathcal{Z}, \Theta)$ ist. Eine entsprechende Abschätzung gilt notwendigerweise dann auch für den Grenzwert. Daraus folgt schon die Abschätzung (75.2).
 b) Die erste Abschätzung folgt unmittelbar aus Teil a), angewendet mit $f(\vec{x}) = c_1$ und $g(\vec{x}) = h(\vec{x})$. Die zweite Abschätzung folgt ebenfalls aus Teil a), dieses Mal für $f(\vec{x}) = h(\vec{x})$ und $g(\vec{x}) = c_2$. \square

Korollar 74.4. Für eine integrierbare Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem zulässigen Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\left| \int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \leq \left(\sup_{\vec{x} \in \mathcal{D}} |f(\vec{x})| \right) \mu(\mathcal{D}). \tag{74.3}$$

BEWEIS. Das folgt unmittelbar aus Satz 75.3 unter Anwendung der Abschätzungen $\pm f(\vec{y}) \leq \sup_{\vec{x} \in \mathcal{D}} |f(\vec{x})|$ für jedes $\vec{y} \in \mathcal{D}$. \square

74.3 Zerlegung des Integrationsbereichs

Definition 74.5. Sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein zulässiger Integrationsbereich. Ein System von zulässigen Integrationsbereichen $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n &= \mathcal{D}, \\ \mu(\mathcal{D}_k \cap \mathcal{D}_j) &= 0 \quad \text{für } k, j = 1, 2, \dots, n, \quad k \neq j, \end{aligned}$$

nennt man eine Zerlegung von \mathcal{D} . \triangle

Bei der Einführung von riemannschen Summen sind für Rechtecke und Quader bereits spezielle Zerlegungen in Teilrechtecke beziehungsweise Teilquader betrachtet worden.

Satz 74.6 (Zerlegung des Integrationsbereichs). Für eine integrierbare Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$ gemäß Definition 75.5 gilt die Identität

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=1}^n \int_{\mathcal{D}_k} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

BEWEIS. Wird hier nicht geführt. \square

74.4 Nullmengen

Definition 74.7. Eine Menge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt Nullmenge, falls für jedes $R > 0$ die Menge $\mathcal{N}_R = \{\vec{x} \in \mathcal{N} \mid |\vec{x}| \leq R\}$ ein zulässiger Integrationsbereich mit $\mu(\mathcal{N}_R) = 0$ ist. \triangle

Sinngemäß ist damit $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ Nullmenge, falls ihre Schnitte $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ mit beliebigen beschränkten Mengen $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$ jeweils das Maß $\mu(\mathcal{N} \cap \mathcal{M}) = 0$ haben. Insbesondere ist damit jeder zulässige Integrationsbereich $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\mu(\mathcal{N}) = 0$ eine Nullmenge.

Bemerkung 74.8. Wir stellen im Folgenden einige Beispiele für Nullmengen vor: Dabei sei immer $d \geq 2$.

- Teilmengen von Nullmengen sind wieder Nullmengen.
- Für einen Aufpunkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ und eine Richtung $\vec{r} \in \mathbb{R}^d$ ist die Strecke $\mathcal{N} = \{x + tr \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ein zulässiger Integrationsbereich mit $\mu(\mathcal{N}) = 0$ und damit eine Nullmenge.
- Für jede Gerade $\mathcal{G} = \{x + tr \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^d$ ist $\mathcal{G}_R = \{\vec{x} \in \mathcal{O}_2 \mid |\vec{x}| \leq R\}$ eine Strecke oder die leere Menge. Damit ist \mathcal{G} eine Nullmenge.

- Jede Ebene $\mathcal{E} = \{\vec{x} + t\vec{a} + s\vec{b} \mid s, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit einem Aufpunkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ ist in \mathbb{R}^3 eine Nullmenge.
- Es sind Kurven in \mathbb{R}^d ebenfalls Nullmengen. \triangle

Veränderungen von Integrationsbereichen um Nullmengen haben auf den Wert eines Integrals keinen Einfluss:

Satz 74.9. Für eine integrierbare Funktion $f : \mathcal{D} \cup \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer beschränkten Nullmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_{\mathcal{D} \cup \mathcal{N}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

BEWEIS. Das folgt im Wesentlichen aus Satz 75.6 auf der vorherigen Seite und der Identität $\int_{\mathcal{N}} f(\vec{x}) d\vec{x} = 0$. Diese Identität erhält man so:

$$\left| \int_{\mathcal{N}} f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \stackrel{(*)}{\leq} \underbrace{\sup_{\vec{x} \in \mathcal{N}} |f(\vec{x})|}_{< \infty} \underbrace{\mu(\mathcal{N})}_{= 0} = 0,$$

wobei die Abschätzung (*) aus Korollar 75.4 auf Seite 206 folgt. \square

74.5 Zwei Mittelwertsätze der Integralrechnung

Definition 74.10 (Wegzusammenhang). Eine Menge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{M}$ eine stetige Abbildung $\vec{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ gibt, deren Werte alle in \mathcal{M} liegen und die in \vec{x} beginnt und in \vec{y} endet, d. h.

$$\vec{\gamma}(0) = \vec{x}, \quad \vec{\gamma}(1) = \vec{y}, \quad \vec{\gamma}(t) \in \mathcal{M} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1.$$

Satz 74.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein zulässiger Integrationsbereich, der zudem abgeschlossen und wegzusammenhängend ist. Weiter seien $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ und $p : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $p(\vec{x}) \geq 0$ für $\vec{x} \in \mathcal{D}$. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\vec{\xi} \in \mathcal{D}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) p(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{\xi}) \int_{\mathcal{D}} p(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (74.4)$$

BEWEIS. Es gibt Punkte $\vec{x}_{\min}, \vec{x}_{\max} \in \mathcal{D}$ mit der Eigenschaft

$$f(\vec{x}_{\min}) = \min_{\vec{x} \in \mathcal{D}} f(\vec{x}), \quad f(\vec{x}_{\max}) = \max_{\vec{x} \in \mathcal{D}} f(\vec{x}),$$

und mit Hilfe von Teil a) von Satz 75.3 auf der vorherigen Seite erhält man dann die Abschätzungen

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_{\min}) \int_{\mathcal{D}} p(\vec{x}) d\vec{x} &\leq \int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) p(\vec{x}) d\vec{x} \\ &\leq f(\vec{x}_{\max}) \int_{\mathcal{D}} p(\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (74.5)$$

Hierbei geht die Nichtnegativität der Funktion p ein. Eine einfache Umformung von (75.5) ergibt

$$f(\vec{x}_{\min}) \leq \frac{\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) p(\vec{x}) d\vec{x}}{\int_{\mathcal{D}} p(\vec{x}) d\vec{x}} \leq f(\vec{x}_{\max}),$$

wobei hier o.B.d.A. $\int_{\mathcal{D}} p(\vec{x}) d\vec{x} \neq 0$ angenommen wird. Wegzusammenhang des Integrationsbereichs \mathcal{D} und Stetigkeit der Funktion f liefern nun die Existenz einer Zwischenstelle $\vec{\xi} \in \mathcal{D}$ mit der Eigenschaft

$$f(\vec{\xi}) = \frac{\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) p(\vec{x}) d\vec{x}}{\int_{\mathcal{D}} p(\vec{x}) d\vec{x}},$$

und eine weitere einfache Umformung ergibt dann (75.4). \square

Satz 75.11 liefert im Fall $p(\vec{x}) \equiv 1$ unmittelbar folgendes Resultat:

Satz 74.12 (Mittelwertsatz der Integralrechnung, einfache Version). Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge mit den Eigenschaften aus Satz 75.11, und $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Funktion. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\vec{\xi} \in \mathcal{D}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{\xi}) \mu(\mathcal{D}). \quad (74.6)$$

Dieser Satz bedeutet im zweidimensionalen Fall, dass es einen Funktionswert $y = f(\xi)$ von f gibt, so dass das Integral von f mit dem (eventuell mit einem negativen Vorzeichen versehenen) Volumen eines zylindrischen Körpers mit Grundfläche \mathcal{D} und Höhe y übereinstimmt.

75 Integration vektorwertiger Funktionen

75.1 Einführung

Die Berechnung von Schwerpunkten und Momenten erfordert die Integration vektorwertiger Funktionen.

Definition 75.1. Eine Funktion $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 1$ mit einem zulässigen Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt *integrierbar*, falls die Komponentenfunktionen $f_k : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$, alle integrierbar sind. Man setzt

$$\int_{\mathcal{D}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \left(\int_{\mathcal{D}} f_1(\vec{x}) d\vec{x}, \dots, \int_{\mathcal{D}} f_m(\vec{x}) d\vec{x} \right) \in \mathbb{R}^m.$$

In den Anwendungen (siehe dazu den nachfolgenden Abschnitt) ist dabei üblicherweise $m = d$.

75.2 Berechnung von Masse und Schwerpunkt eines Körpers

75.2.1 Die diskrete Variante

Wir betrachten ein System von kleinen Körpern, die sich in den Punkten $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^d$ befinden und die Massen $m_1, m_2, \dots, m_n > 0$ (mit $[m_k] = \text{kg}$) besitzen, wobei $d \geq 2$ gilt. Die Gesamtmasse M_n und der Schwerpunkt $\vec{x}_{S,n} \in \mathbb{R}^d$ dieses Systems berechnet sich dann zu

$$M_n = \sum_{k=1}^n m_k \geq 0, \quad \vec{x}_{S,n} = \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^n m_k \vec{x}_k \in \mathbb{R}^d. \tag{75.1}$$

Es ist damit der Schwerpunkt $\vec{x}_{S,n}$ ein gewichtetes Mittel der Positionen $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ der Punktmassen.

Beispiel. Der Schwerpunkt zweier in $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2$ befindlicher Massenkörper liegt sicher auf der Verbindungsstrecke $\{(1-t)\vec{x}_1 + t\vec{x}_2 \mid 0 \leq t \leq 1\}$ von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 . Wir nehmen im Folgenden an, dass der in $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^2$ befindliche Massenpunkt die Masse $m_1 = \pi$ besitzt, und der in \vec{x}_2 besitze die Masse $m_2 = 4\pi$. Im Fall

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix},$$

ergibt sich für den Schwerpunkt $\vec{x}_{S,2} \in \mathbb{R}^2$ Folgendes:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{S,2} &= \frac{1}{5} \left(4 \begin{pmatrix} 60 \\ 30 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{4 \cdot 30}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 24 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine grafische Illustration dazu finden Sie in Abbildung 139. △

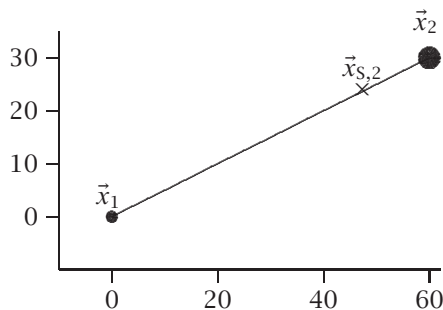


Abb. 139: Beispiel für den Schwerpunkt zweier Massenpunkte

Beispiel. Im Fall $m_1 = m_2 = \dots = m_n =: m$ lässt sich die Identität (76.1) in der Form

$$M_n = nm, \quad \vec{x}_{S,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \vec{x}_k \in \mathbb{R}^d$$

schreiben. △

Beispiel. Der Schwerpunkt von drei in $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in \mathbb{R}^2$ befindlichen Massen liegt sicher innerhalb des von diesen drei Punkten aufgespannten Dreiecks. Wir nehmen nun an, dass diese Massenpunkte alle die gleiche Masse $m = \pi$ besitzen. Im Fall

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ergibt sich dann für den Schwerpunkt $\vec{x}_{S,3} \in \mathbb{R}^2$ Folgendes:

$$\vec{x}_{S,3} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine grafische Illustration dazu finden Sie in Abbildung 140. △

75.2.2 Die kontinuierliche Version

In Verallgemeinerung der Situation in Abschnitt 76.2.1 werden im Folgenden Formeln für Gesamtmasse M und Schwerpunkt $\vec{x}_S \in \mathbb{R}^d$ eines Körpers hergeleitet, der sich innerhalb der Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ befindet und die Massendichte (Masse pro Volumeneinheit) $\varrho(\vec{x}) \geq 0$ für $\vec{x} \in \mathcal{D}$ besitzt, mit $[M] = \text{kg}$ und $[\varrho(\vec{x})] = \text{kg}/m^d$ für $\vec{x} \in \mathcal{D}$. Zur näherungsweise Berechnung von Masse M und Schwerpunkt $\vec{x}_S \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir eine Zerlegung (vergleiche hierzu Definition 75.5)

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n = \mathcal{D}$$

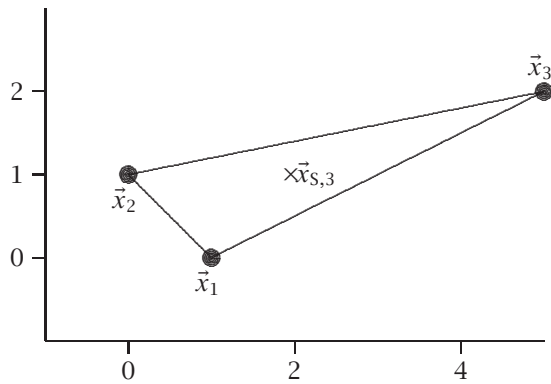


Abb. 140: Beispiel für den Schwerpunkt dreier Massenpunkte

der Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$, wobei die Teilbereiche \mathcal{D}_k jeweils ein kleines Maß $\mu(\mathcal{D}_k)$ besitzen ($k = 1, 2, \dots, n$). Man kann sich dann diesen Körper näherungsweise als ein System von Punktmassen in ausgewählten Punkten $\vec{x}_k \in \mathcal{D}_k$ mit den jeweiligen Massen $m_k = \varrho(\vec{x}_k)\mu(\mathcal{D}_k)$ vorstellen, wobei $\mu(\mathcal{D}_k)$ wie üblich den Flächeninhalt von \mathcal{D}_k (im Fall $d = 2$) beziehungsweise das Volumen von \mathcal{D}_k (im Fall $d = 3$) bezeichnet. Für die Gesamtmasse und den Schwerpunkt dieses Systems gelten gemäß (76.1) näherungsweise die Identitäten

$$M_n = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n \varrho(\vec{x}_k)\mu(\mathcal{D}_k),$$

$$\vec{x}_{s,n} = \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^n m_k \vec{x}_k = \frac{1}{M_n} \sum_{k=1}^n \varrho(\vec{x}_k)\mu(\mathcal{D}_k)\vec{x}_k.$$

Bei beiden Summen handelt es sich um riemannsche Summen, mit

$$M_n \approx \int_{\mathcal{D}} \varrho(\vec{x}) d\vec{x} =: M, \quad (75.2)$$

$$\vec{x}_{s,n} \approx \frac{1}{M} \int_{\mathcal{D}} \varrho(\vec{x})\vec{x} d\vec{x} =: \vec{x}_s, \quad (75.3)$$

wobei dann die Werte M und \vec{x}_s plausible Setzungen für Gesamtmasse beziehungsweise Schwerpunkt liefern. Man beachte, dass das zweite Integral über eine vektorwertige Funktion gebildet wird und entsprechend einen Vektor als Ergebnis liefert.

Bemerkung. Im Falle einer konstanten Dichte $\varrho(\vec{x}) \equiv \varrho > 0$ gehen die Darstellungen für Masse und Schwerpunkt in (76.2) beziehungsweise (76.3) über in

$$M = \varrho\mu(\mathcal{D}), \quad \vec{x}_s = \frac{1}{\mu(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} \vec{x} d\vec{x},$$

wie man leicht sieht. Man beachte noch, dass der Schwerpunkt \vec{x}_s in diesem Fall nicht von der Dichte ϱ und auch nicht von der Gesamtmasse M abhängt. \triangle

Beispiel. Wir berechnen den Schwerpunkt des Dreiecks

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{(x, y) \mid y - x \leq 0 \leq x, y\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\} \end{aligned}$$

bei konstanter Dichte $\varrho > 0$. Für den Flächeninhalt ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{D}) &= \int_{\mathcal{D}} 1 dx dy = \int_0^1 \int_0^x 1 dy dx \\ &= \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Mit der Notation $\vec{x}_s = (x_s, y_s)$ erhält man

$$\begin{aligned} x_s &= 2 \int_{\mathcal{D}} x dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^x x dy dx \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}, \\ y_s &= 2 \int_{\mathcal{D}} y dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^x y dy dx \\ &= \int_0^1 (y^2 \Big|_{y=0}^{y=x}) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

und damit $\vec{x}_s = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. \triangle

76 Transformationsatz

Wir führen in diesem Abschnitt zunächst einige der wichtigsten Koordinatentransformationen ein. Anschließend wird der Transformationsatz zur Berechnung der Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher vorgestellt. Diese Integrationsregel stellt ein Analogon zur Substitutionsregel für Integrale von Funktionen von einer Veränderlichen dar. Während es im eindimensionalen Fall darum geht, Integranden auf einfachere Form zu bringen, soll hier durch eine geeignete Koordinatentransformation der Integrationsbereich vereinfacht werden. Solche Koordinatentransformationen $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$ werden - wie oben bereits erwähnt - zunächst behandelt.

76.1 Koordinatentransformationen

Wir betrachten im Folgenden Koordinatentransformationen $T : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathbb{R}^d$, wobei $d = 2$ oder $d = 3$ sowie $\mathcal{D}_T \subseteq \mathbb{R}^d$ gelte und die Transformation T «im Wesentlichen» umkehrbar und orientierungstreu ist. Die präzisen Bedingungen sind wie folgt: