VIII Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher

73 Integration von Funktionen zweier Veränderlicher

73.1 Einführung

Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen ist die Berechnung von Integralen

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \in \mathbb{R} \tag{73.1}$$

mit einem ebenen Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ von zwei Veränderlichen.[1]

Mögliche Anwendungen sind im Folgenden aufgelistet:

- die Berechnung der Gesamtmasse eines auf der ebenen Fläche $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ verteilten inhomogenen Körpers; hier beschreibt $f(\vec{x})$ die Massendichte (Masse pro Flächeneinheit) im Punkt $\vec{x} \in \mathcal{D}$;
- die Berechnung der Gesamtladung einer auf der ebenen Fläche $\mathcal{D}$ inhomogen verteilten Ladung; hier beschreibt $f(\vec{x})$ die Ladungsdichte (Ladung pro Flächeneinheit) im Punkt $\vec{x} \in \mathcal{D}$;
- die Berechnung des Flächeninhaltes von $\mathcal{D}$ (hier setzt man $f(\vec{x}) \equiv 1$);
- die Berechnung des Volumens eines Körpers der Form $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}, 0 \le z \le f(x, y)\}$, wobei hier die Funktion f als nichtnegativ angenommen wird;
- die Berechnung des Schwerpunktes der Fläche $\mathcal{D}$ (hier gilt $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$; das Integral lässt sich leicht auf vektorwertige Funktionen erweitern und ist dann selbst vektorwertig).

Auf die dabei auftretenden Einheiten gehen wir später ein.

73.2 Integration auf Rechteckbereichen

73.2.1 Einführung

Bei der nachfolgenden formalen Einführung des Integrationsbegriffs wird zunächst ein einfacher zweidimensionaler Integrationsbereich in der x-y-Ebene in Form eines Rechtecks betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= [a, b] \times [c, d] \\ &= \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}. \end{aligned} \tag{73.2}$$

73.2.2 Zerlegung des Rechteckbereiches

Das Integral einer Funktion ist das Ergebnis eines im Folgenden beschriebenen Grenzprozesses. Hierzu betrachtet man zunächst eine Zerlegung – diese wird kurz mit $\mathcal{Z}$ bezeichnet – des betrachteten Integrationsbereichs $\mathcal{D}$ in kleine Teilrechtecke.

Eine solche Zerlegung $\mathcal{Z}$ wird festgelegt durch Gitterpunkte

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \\ c &= y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1} < y_m = d, \end{aligned} \tag{73.3}$$

mit Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$, die für jede Zerlegung unterschiedlich gewählt werden dürfen. Man erhält so die Teilrechtecke

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ij} &:= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ &= \{(x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j\}, \\ &\qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{73.4}$$

Eine grafische Illustration dazu finden Sie in Abbildung 124.

Damit ist die Zerlegung vollständig bestimmt. Wir führen in diesem Zusammenhang folgende Bezeichnungen ein.

Definition 73.1. a) Eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ des rechteckförmigen Integrationsbereichs (73.2) besteht aus einem gewählten Gitter der Form (73.3).
b) Die *Feinheit* dieser Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist

$$|\Delta \mathcal{Z}|_\infty = \max_{i,j} \mu(\mathcal{D}_{ij}),$$

wobei

$$\mu(\mathcal{D}_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}),\ i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{73.5}$$

$\triangle$

[1] Die englische Bezeichnung für Fläche ist «area». Daher werden Flächen häufig mit dem Buchstaben A bezeichnet.

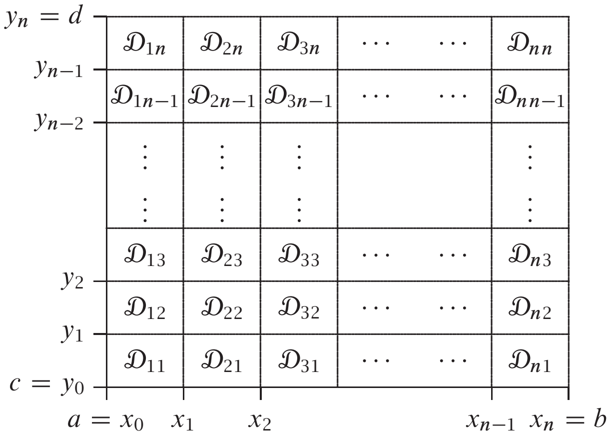

Abb. 124: Zerlegung eines Rechtecks in Teilrechtecke

Die Zahl $\mu(\mathcal{D}_{ij})$ in (73.5) ist der Flächeninhalt des rechteckigen Flächenelements $\mathcal{D}_{ij}$ (die Definition von $\mathcal{D}_{ij}$ finden Sie in (73.5)). Die Feinheit $|\Delta \mathcal{Z}|_\infty$ der Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist demnach das Maximum der Flächeninhalte der Flächenelemente.

73.2.3 Riemannsche Summen

Das noch zu definierende Integral ergibt sich als Grenzwert von riemannschen Summen, die nun vorgestellt werden. Für eine fest gewählte Zerlegung $\mathcal{Z}$ des betrachteten Integrationsbereichs $[a,b] \times [c,d]$ wählt man dazu aus jedem Teilrechteck des betrachteten Gitters noch einen beliebigen Zwischenpunkt aus:

$$(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in \mathcal{D}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{73.6}$$

Die Menge dieser Zwischenpunkte bezeichnen wir mit Θ. Die dazugehörige *riemannsche Summe* ist von der Form

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu(\mathcal{D}_{ij}) f(\xi_{ij}, \eta_{ij}). \tag{73.7}$$

Beispiel. Die praktische Bedeutung einer riemannschen Summe soll am Fall einer auf der Fläche $[a,b] \times [c,d]$ sitzenden inhomogenen Masse oder elektrischen Ladung beschrieben werden, wobei deren Verteilung durch eine Dichtefunktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ beschrieben werde. Es gibt hier also der Wert $f(\vec{x})$ die Massen- beziehungsweise Ladungsdichte pro Flächeninhalt in dem Punkt $\vec{x} \in [a,b] \times [c,d]$ an. Bei Verwendung der SI-Einheiten gilt damit $[\, f(\vec{x})\,] = \mathrm{kg/m}^2$ im

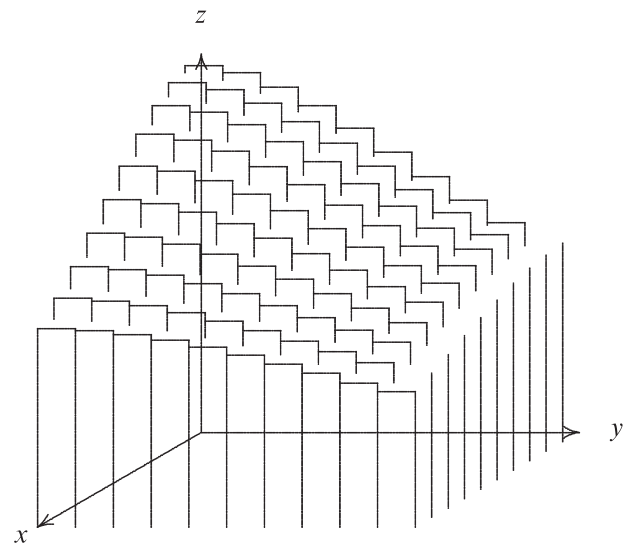

Abb. 125:

Fall einer Massenverteilung beziehungsweise $[\, f(\vec{x})\,] = \mathrm{C/m}^2$ bei einer Ladungsverteilung.

Bei einer fein gewählten Zerlegung $\mathcal{Z}$ – es ist also $|\Delta \mathcal{Z}|_\infty$ klein – ist jedes der Flächenelemente $\mathcal{D}_{ij}$ klein und die betrachtete Funktion f dann dort jeweils nahezu konstant und damit dort ungefähr gleich $f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$. Gibt also $f(\vec{x})$ die Dichte pro Flächeninhalt (z. B. bezüglich einer Masse oder Ladung) in dem Punkt $\vec{x} \in [a,b] \times [c,d]$ an, so ist das Produkt $\mu(\mathcal{D}_{ij}) f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$ näherungsweise gleich der Gesamtmenge auf $\mathcal{D}_{ij}$, und die riemannsche Summe $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta)$ ist damit näherungsweise gleich der Gesamtmenge auf $[a,b] \times [c,d]$.

Die Güte der Approximation der riemannschen Summe $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta)$ an die Gesamtmenge auf $[a,b] \times [c,d]$ wird umso besser sein, je feiner die Zerlegung $\mathcal{Z}$ gewählt wird. Δ

73.2.4 Definition des Integrals einer Funktionen zweier Veränderlicher

Definition 73.2. Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, falls

- für jede Folge von Zerlegungen $\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)}, \ldots$ mit der Eigenschaft $|\Delta \mathcal{Z}^{(s)}|_\infty \to 0$ für $s \to \infty$ (deren Feinheiten sich also null nähern)
- und jede Wahl von dazugehörigen Mengen von Zwischenpunkten $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots$

die Folge der Riemann-Summen $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}^{(s)}, \Theta^{(s)})$ konvergiert und dieser Grenzwert von der Wahl der Zerlegungsfolge und der Zwischenpunktefolge unabhängig ist. Den Grenzwert

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \lim_{s\to\infty} \mathcal{R}(f, \mathcal{Z}^{(s)}, \Theta^{(s)}) \qquad (73.8)$$

nennt man das *Integral von f über* $[a,b]\times[c,d]$. △

Man beachte, dass jede betrachtete Zerlegung $\mathcal{Z}^{(s)}$ in Definition 73.2 von der Form (73.3) auf Seite 203 ist, wobei die Gitterpunkte selbst und auch deren Anzahl (diese Anzahl ist durch die Werte n umd m in (73.3) bestimmt) von dem Index s abhängen.

73.3 Beliebige beschränkte Integrationsbereiche in $\mathbb{R}^2$

Der Begriff des Integrals lässt sich problemlos auf beliebige Integrationsbereiche $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ erweitern. Es muss lediglich gefordert werden, dass die Menge $\mathcal{D}$ beschränkt ist. In diesem Fall gibt es sicher ein Rechteck $[a,b]\times[c,d]$, das die Menge $\mathcal{D}$ umfasst, d. h. es gilt

$$\mathcal{D} \subseteq [a,b]\times[c,d]. \qquad (73.9)$$

Man erweitert dann den Definitionsbereich der zu integrierenden Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ zu

$$f^*(x) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \vec{x} \in \mathcal{D}, \\ 0, & \vec{x} \in [a,b]\times[c,d],\ \vec{x} \notin \mathcal{D}. \end{cases} \qquad (73.10)$$

Definition 73.3. Eine Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit einer beschränkten Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *integrierbar über* $\mathcal{D}$, falls die durch (73.9)–(73.10) definierte Erweiterung $f^* : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ (mit einem Rechteck $[a,b]\times[c,d] \supseteq \mathcal{D}$) integrierbar über $[a,b]\times[c,d]$ ist. Man nennt dann

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{[a,b]\times[c,d]} f^*(\vec{x})\, d\vec{x} \qquad (73.11)$$

das *Integral von f über* $\mathcal{D}$. △

Eine andere übliche Bezeichnungsweise für (73.11) ist *Riemann-Integral* anstelle Integral. In dem vorliegenden zweidimensionalen Fall sind *ebenes Bereichsintegral*, *Flächenintegral* oder *Doppelintegral* weitere Bezeichnungen, wobei die letzte Bezeichnung weiter unten in einem anderen Kontext verwendet wird.

Weitere gängige Notationen für das Integral in (73.11) sind

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{bzw.} \quad \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy. \qquad (73.12)$$

In der Literatur findet man gelegentlich auch die Schreibweise $\int_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dA$, wobei die Verwendung des Buchstabens A hier verdeutlichen soll, dass über einen ebenen Bereich integriert wird. Die Notation dA steht dabei für Flächenelement und ist unabhängig von der Verwendung des Symbols für den betrachteten Integrationsbereich (hier $\mathcal{D}$).

Bemerkung 73.4. a) Der Wert des Integrals in (73.11) ist unabhängig von der Wahl des umfassenden Rechtecks $[a,b]\times[c,d]$.
b) Wir gehen noch kurz auf die physikalische Einheit des Integrals ein. Offenbar gilt für jede riemannsche Summe $[\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta)] = [f]\cdot[x]\cdot[y]$, und dann muss für das Integral als Grenzwert riemannscher Summen Gleiches gelten:

$$\Big[\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy \Big] = [f]\cdot[x]\cdot[y].$$

Z. B. gilt also im Fall (es werden SI-Einheiten verwendet) $[x] = [y] = \mathrm{m}$ und $[f] = \mathrm{kg/m^2}$ die Identität $\big[\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy \big] = \mathrm{kg}$. △

73.4 Berechnung von Flächeninhalten und Volumina durch ebene Bereichsintegration

73.4.1 Flächeninhalt

Definition 73.5. Für eine beschränkte Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ nennt man das Integral

$$\mu(\mathcal{D}) := \int_{\mathcal{D}} 1\, d\vec{x} \qquad (73.13)$$

den *Flächeninhalt* der Menge $\mathcal{D}$. Hierbei wird angenommen, dass dieses Integral existiert; die Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ wird dann auch *zulässiger Integrationsbereich* genannt.

Bemerkung 73.6. a) Die riemannschen Summen zu (73.13) liefern offenbar Summen von Inhalten von Flächenelementen. Daher ist die Setzung $\int_{\mathcal{D}} 1\, d\vec{x}$ als Flächeninhalt plausibel.
b) Eine beschränkte Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist also genau dann zulässiger Integrationsbereich, wenn die Einsfunktion $\mathbf{1} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto 1$ integrierbar ist.
c) Die meisten der in der Praxis auftretenden Integrationsbereiche $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ sind zulässig. △

73.4.2 Berechnung von Volumina

In einfachen Fällen lassen sich mit zweidimensionalen Integralen auch Volumina berechnen. Dies gilt für Körper der Form

$$\mathcal{D} = \big\{ (x,y,z) \mid (x,y) \in \mathcal{D},\, g(x,y) \le z \le h(x,y) \big\} \tag{73.14}$$

mit gegebenen Funktionen $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit $g \le h$, und $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine gegebene ebene Fläche. Hier wird der Boden des Körpers $\mathcal{D}$ durch den Graphen der Funktion g begrenzt, und die obere Begrenzung bildet der Graph der Funktion h.

FEHLT

Abb. 126: Räumlicher Bereich zwischen Graph der Funktion und x-y-Ebene

Die Situation ist in Abbildung 126 dargestellt. Das Volumen des Körpers (73.14) ist dann definiert durch

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} h(\vec{x}) - g(\vec{x})\, d\vec{x},$$

falls die Differenzfunktion $f = h - g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ integrierbar ist. Die Plausibilität dieser Definition wird sofort bei Betrachtung der dazugehörigen riemannschen Summen klar, wenn man nur die plausible Formel «Grundfläche × Höhe» für das Volumen eines Quaders akzeptiert.

73.5 Berechnung ebener Bereichsintegrale mittels Doppelintegration

Für viele ebene Integrationsbereiche $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ lässt sich die zweidimensionale Integration durch Hintereinanderausführung zweier eindimensionaler Integrationen bewerkstelligen, die hier kurz als *Doppelintegration* bezeichnet wird.

73.5.1 Achsenparallele rechteckige Integrationsbereiche

Der einfachste Fall liegt bei achsenparallelen rechteckigen Integrationsbereichen vor:

Satz 73.7 (Achsenparallele Rechtecke). *Es sei die Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Außerdem seien die folgenden beiden Bedingungen erfüllt: für jedes $x \in [a,b]$ existiere das Integral $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, und für jedes $y \in [c,d]$ existiere das Integral $G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$. Dann gelten die beiden Identitäten*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(\vec{x})\,d\vec{x} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \tag{73.15}$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy. \tag{73.16}$$

BEWEIS. Wird hier nicht geführt. □

Bemerkung. a) In (73.15) berechnet man zunächst das innere Integral, das eine von x abhängige Funktion $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ liefert. Anschließend hat man dann das äußere Integral $\int_a^b F(x)\,dx$ zu berechnen. Entsprechend hat man bei (73.16) vorzugehen, wobei hier das innere Integral eine von y abhängige Funktion liefert.
b) Die beiden Identitäten (73.15) und (73.16) bedeuten, dass bei der Integration einer Funktion von zwei Veränderlichen mittels Doppelintegralen die Integrationsreihenfolge beliebig gewählt werden kann. △

Beispiel. Wir berechnen das Integral der Funktion $f(x,y) = x + 2y$ über das Rechteck $\mathcal{D} = [1,2] \times [0,1]$. Anwendung von (73.15) ergibt

$$\begin{aligned}\int_{[1,2]\times[0,1]} x + 2y\,dx\,dy &= \int_1^2 \int_0^1 x + 2y\,dy\,dx \\ &= \int_1^2 xy + y^2 \Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_1^2 x + 1\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{4}{2} + 2 - (\tfrac{1}{2} + 1) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$ △

73.5.2 Ebene Normalbereiche, Teil 1

Wir betrachten im Folgenden ebene *Normalbereiche*, wofür es zwei Klassen gibt. Bei der ersten Klasse handelt es sich um Mengen $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, bei denen

- links und rechts jeweils parallel zur y-Achse verlaufende Ränder existieren,
- oben und unten jeweils Ränder verlaufen, die sich als Funktionen von x beschreiben lassen,
- und keine Löcher vorliegen.

Die mathematische Formulierung für solche Integrationsbereiche sieht hier so aus:

$$\mathcal{D} := \big\{ (x,y) \mid a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x) \big\} \tag{73.17}$$

mit stetigen Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei noch $g \le h$ gelte. Die Situation ist in Abbildung 127 dargestellt.

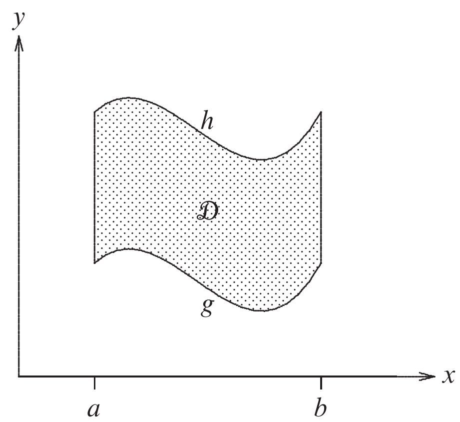

Abb. 127: Illustration zum Normalbereich (73.17)

Beispiel 73.8 (Ellipse in Normalform). Es beschreibt

$$\mathcal{E} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x^2}{a^2} + \tfrac{y^2}{b^2} \le 1 \right\} \tag{73.18}$$

eine Ellipse, deren Hauptachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen und die Längen $a > 0$ beziehungsweise $b > 0$ besitzen und deren Mittelpunkt im Ursprung liegt. Es ist die Menge (73.18) von der Form (73.17), wie man leicht sieht:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ (x, y) \mid -a \le x \le a,\ \tfrac{y^2}{b^2} \le 1 - \tfrac{x^2}{a^2} \right\} \\ &= \Big\{ (x, y) \mid -a \le x \le a, \\ &\qquad -b(1 - \tfrac{x^2}{a^2})^{1/2} \le y \le b(1 - \tfrac{x^2}{a^2})^{1/2} \Big\}. \quad \triangle \end{aligned}$$

Die Integration von Funktionen über ebene Normalbereiche der Form (73.17) lässt sich auf die Hintereinanderausführung zweier eindimensionaler Integrationen zurückführen.

Satz 73.9. *Für einen ebenen Normalbereich $\mathcal{D}$ der Form (73.17) und eine stetige Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{73.19}$$

Beweis. Wird hier nicht geführt. □

Bemerkung 73.10. Satz 73.9 erhält erst für nichtkonstante Integranden f eine eigenständige Bedeutung. Flächeninhalte $\mu(\mathcal{D})$ von Normalbereichen in $\mathbb{R}^2$ der Form (73.17) (hier gilt $f \equiv 1$) lassen sich nämlich direkt als eindimensionales Integral schreiben:

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_a^b h(x) - g(x)\, dx. \qquad \triangle$$

Beispiel. Wir berechnen das Integral der Funktion $f(x, y) = 2y$ über das Dreieck $\Delta = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 3x\}$. Anwendung von (73.19) ergibt

$$\begin{aligned} \int_\Delta f(x, y)\, dx\, dy &= \int_0^1 \int_x^{3x} 2y\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left(y^2 \Big|_{y=x}^{y=3x} \right) dx = \int_0^1 9x^2 - x^2\, dx = 8 \int_0^1 x^2\, dx \\ &= 8 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{3} \cdot (1 - 0) = \frac{8}{3}. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Beispiel 73.11. Wir berechnen nun mit Hilfe von (73.19) den Flächeninhalt der Ellipse (73.18) (man beachte aber Bemerkung 73.10):

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{E}) &= \int_{\mathcal{E}} 1\, dx\, dy = \int_{-a}^{a} \int_{-b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}}^{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}} 1\, dy\, dx \\ &= 2b \int_{-a}^{a} \left(1 - \tfrac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} dx \overset{(*)}{=} 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta \\ &= ab\,(\cos\theta \sin\theta + \theta)\, \Big|_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} = ab\left(\tfrac{\pi}{2} - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= ab\pi. \end{aligned}$$

Die gängigen Techniken zur eindimensionalen Integration sind bereits in Kapitel IV ausführlich behandelt worden. Wir gehen dennoch kurz auf die Identität $(*)$ ein. Hier führt man die Substitution $\frac{x}{a} = \sin\theta$ mit $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ durch. Für den Integranden ergibt dies

$$\begin{aligned} \left(1 - \tfrac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} &= (1 - \sin^2\theta)^{1/2} = (\cos^2\theta)^{1/2} \\ &= \cos\theta > 0, \end{aligned}$$

und außerdem gilt $\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$. Daraus folgt die Identität $(*)$. △

73.5.3 Ebene Normalbereiche, Teil 2

Bei der zweiten Klasse ebener Normalbereiche handelt es sich um Mengen $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$,

- bei denen es links und rechts jeweils parallel zur y-Achse verlaufende Ränder gibt,
- deren oberen und unteren Ränder sich als Funktionen von x beschreiben lassen,
- und die keine Löcher aufweisen.

Die mathematische Formulierung für solche Integrationsbereiche sieht hier so aus:

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y) \mid c \le y \le d,\ g(y) \le x \le h(y) \right\} \tag{73.20}$$

mit stetigen Funktionen $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ und $h : [c, d] \to \mathbb{R}$, wobei wieder $g \le h$ gelte. Die Situation ist in Abbildung 128 dargestellt.

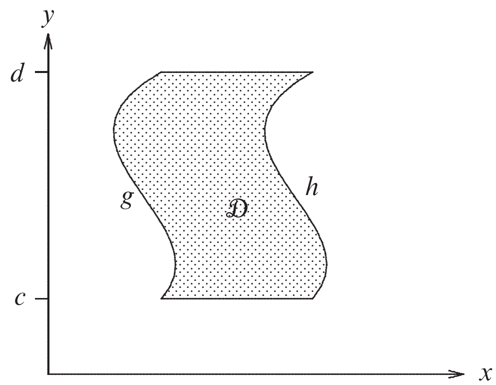

Abb. 128: Illustration zum Normalbereich (73.20)

Beispiel (Ellipse in Normalform). Die in Beispiel 73.8 betrachtete Ellipse in Normalform lässt sich auch in der Form (73.20) darstellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \Big\{ (x, y) \mid -b \le y \le b,\ \tfrac{x^2}{a^2} \le 1 - \tfrac{y^2}{b^2} \Big\} \qquad (73.21) \\ &= \Big\{ (x, y) \mid -b \le y \le b, \\ &\qquad -a(1 - \tfrac{y^2}{b^2})^{1/2} \le x \le a(1 - \tfrac{y^2}{b^2})^{1/2} \Big\}. \qquad \triangle \end{aligned}$$

Für Integrationsbereiche der Form (73.20) gilt die folgende Integrationsregel:

Satz 73.12 (Integrationsbereiche mit achsenparallelen oberen und unteren Berandungen). *Für einen Integrationsbereich $\mathcal{D}$ der Form (73.20) und eine stetige Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (73.22)$$

Beweis. Wird hier nicht geführt. □

Auf ein Beispiel zu (73.22) wird hier verzichtet. Man beachte, dass in (73.22) und auch in (73.19) eine Vertauschung der Integrationsreihenfolge – anders als in Satz 73.7 – schon aus formalen Gründen nicht möglich ist.

74 Integration von Funktionen dreier Veränderlicher

Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen ist die Berechnung von Integralen

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x})\, d\vec{x} \in \mathbb{R} \qquad (74.1)$$

mit einem Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ und einer Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ von drei Veränderlichen. Mögliche Anwendungen sind im Folgenden aufgelistet:

- die Berechnung der Gesamtmasse eines im Volumen $\mathcal{D}$ inhomogen verteilten Körpers; hier beschreibt $f(\vec{x})$ die Massendichte (Masse pro Volumeneinheit) im Punkt $\vec{x} \in \mathcal{D}$;
- die Berechnung der Gesamtladung einer räumlich in $\mathcal{D}$ inhomogen verteilten Ladung; hier beschreibt $f(\vec{x})$ die Ladungsdichte (Ladung pro Volumeneinheit) im Punkt $\vec{x} \in \mathcal{D}$;
- die Berechnung des Volumens von $\mathcal{D}$ (hier setzt man $f(\vec{x}) \equiv 1$);
- die Berechnung des Schwerpunktes von $\mathcal{D}$ (hier gilt $f(\vec{x}) = \vec{x}$; das Integral lässt sich leicht auf vektorwertige Funktionen erweitern und ist dann selbst vektorwertig).

Auf die dabei auftretenden Einheiten gehen wir später ein.

74.1 Integration auf Quadern

74.1.1 Einführung

Bei der nachfolgenden formalen Einführung des Integrationsbegriffs für Funktionen von drei Veränderlichen wird zunächst angenommen, dass der betrachtete Integrationsbereich $\mathcal{D} =: \mathcal{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \qquad (74.2) \\ &= \{ (x, y, z) \mid a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2,\ a_3 \le z \le b_3 \}. \end{aligned}$$

Die Situation ist in Abbildung 129 dargestellt.

74.1.2 Zerlegung des Quaders

Das Integral einer Funktion ist das Ergebnis eines Grenzprozesses, der im Folgenden näher beschrieben wird. Hierzu wählt man zunächst eine Zerlegung – diese wird mit $\mathcal{Z}$ bezeichnet – des betrachteten Integrationsbereichs $\mathcal{Q}$. Dieser besteht aus zwei Schritten:

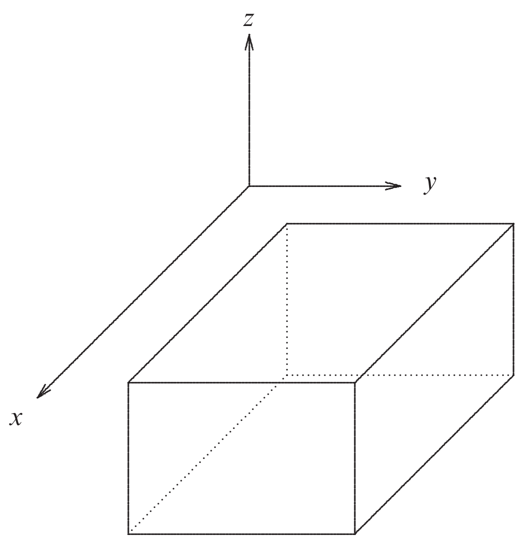

Abb. 129: Quader $\mathcal{Q}$ im $\mathbb{R}^3$

a) Man wählt zunächst Gitterpunkte

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b_1, \\ a_2 &= y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = b_2, \\ a_3 &= z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{p-1} < z_p = b_3, \end{aligned} \tag{74.3}$$

mit Zahlen $m, n, p \in \mathbb{N}$, die für jede Zerlegung unterschiedlich gewählt werden dürfen. Man erhält so die Teilquader

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ijk} &:= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \qquad (74.4) \\ &= \{(x, y, z) \mid x_{i-1} \le x \le x_i,\ y_{j-1} \le y \le y_j, \\ &\qquad z_{j-1} \le z \le z_j\}, \\ &\qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

Eine grafische Illustration dazu finden Sie in Abbildung 130.

Abb. 130: Zerlegung eines Quaders in Teilquader

Damit ist die Zerlegung vollständig bestimmt. Wir führen in diesem Zusammenhang folgende Bezeichnungen ein.

Definition 74.1. a) Eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ des quaderförmigen Integrationsbereichs (74.2) besteht aus einem gewählten Gitter der Form (74.3).

b) Die *Feinheit* dieser Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist

$$|\Delta\mathcal{Z}|_\infty = \max_{i,j,k} \mu(\mathcal{Q}_{ijk}),$$

wobei

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{Q}_{ijk}) &= (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}), \\ &\qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{74.5}$$

$\triangle$

Die Zahl $\mu(\mathcal{Q}_{ijk})$ in (74.5) ist das Volumen des quaderförmigen Volumenelements $\mathcal{Q}_{ijk}$ (die Definition von $\mathcal{Q}_{ijk}$ finden Sie in (74.4)). Die Feinheit $|\Delta\mathcal{Z}|_\infty$ der Zerlegung $\mathcal{Z}$ ist demnach das Maximum der Inhalte der Volumenelemente.

74.1.3 Riemannsche Summen

Das noch zu definierende Integral ergibt sich als Grenzwert von riemannschen Summen, die nun eingeführt werden. Für eine fest gewählte Zerlegung $\mathcal{Z}$ des betrachteten Integrationsbereichs $\mathcal{Q} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ wählt man dazu aus jedem Teilquader des betrachteten Gitters einen beliebigen Zwischenpunkt aus:

$$\begin{aligned} &(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}) \in \mathcal{Q}_{ijk}, \\ &\qquad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, p. \end{aligned} \tag{74.6}$$

Die Menge dieser Zwischenpunkte bezeichnen wir mit Θ. Die dazugehörige *riemannsche Summe* ist von der Form

$$\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \mu(\mathcal{Q}_{ijk}) f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk}). \tag{74.7}$$

Beispiel. Die praktische Bedeutung einer riemannschen Summe soll am Fall einer auf im $\mathcal{Q}$ sitzenden inhomogenen Masse oder elektrischen Ladung beschrieben werden, wobei deren Verteilung durch eine Dichtefunktion $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ beschrieben werde. Es gibt hier also der Wert $f(\vec{x})$ die Massen- beziehungsweise Ladungsdichte pro Volumeneinheit in dem Punkt $\vec{x} \in \mathcal{Q}$ an. Bei Verwendung der SI-Einheiten gilt damit $[f(\vec{x})] = \mathrm{kg/m^3}$ im Fall einer Massenverteilung beziehungsweise $[f(\vec{x})] = \mathrm{C/m^3}$ bei einer Ladungsverteilung.

Bei einer fein gewählten Zerlegung $\mathcal{Z}$ – es ist also $|\Delta\mathcal{Z}|_\infty$ klein – ist jedes der Volumenelemente $\mathcal{Q}_{ijk}$ klein und die betrachtete Funktion f dann dort jeweils nahezu konstant und damit dort ungefähr gleich

$f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})$. Gibt also $f(\vec{x})$ die Dichte pro Volumeneinheit (z. B. bezüglich einer Masse oder Ladung) in dem Punkt $\vec{x} \in \mathcal{Q}$ an, so ist das Produkt $\mu(\mathcal{Q}_{ijk}) f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \zeta_{ijk})$ näherungsweise gleich der Gesamtmenge auf $\mathcal{Q}_{ijk}$, und die riemannsche Summe $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta)$ ist damit näherungsweise gleich der Gesamtmenge auf $\mathcal{Q}$.

Die Güte der Approximation der riemannschen Summe $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta)$ an die Gesamtmenge auf $\mathcal{Q}$ wird umso besser sein, je feiner die Zerlegung $\mathcal{Z}$ gewählt wird. △

74.2 Definition des Integrals einer Funktion von drei Veränderlichen

Definition 74.2. Eine Funktion $f : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ mit einem Quader $\mathcal{Q} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subseteq \mathbb{R}^3$ wie in (74.2) heißt *integrierbar*, falls

- für jede Folge von Zerlegungen $\mathcal{Z}^{(1)}, \mathcal{Z}^{(2)}, \ldots$ mit der Eigenschaft $|\Delta \mathcal{Z}^{(s)}|_\infty \to 0$ für $s \to \infty$ (deren Feinheiten sich also null nähern)
- und jede Wahl von dazugehörigen Mengen von Zwischenpunkten $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \ldots$

die Folge der Riemann-Summen $\mathcal{R}(f, \mathcal{Z}^{(s)}, \Theta^{(s)})$ konvergiert und dieser Grenzwert von der Wahl der Zerlegungs- und der Zwischenpunktefolge unabhängig ist. Den Grenzwert

$$\int_{\mathcal{Q}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \lim_{s \to \infty} \mathcal{R}(f, \mathcal{Z}^{(s)}, \Theta^{(s)}) \tag{74.8}$$

nennt man das *Integral von f über $\mathcal{Q}$*. △

Man beachte, dass – in Analogie zum zweidimensionalen Fall – jede betrachtete Zerlegung $\mathcal{Z}^{(s)}$ in Definition 74.2 von der Form (74.3) auf der vorherigen Seite ist, wobei die Gitterpunkte selbst und auch deren Anzahl (diese Anzahl ist durch die Werte n, m und p in (74.3) bestimmt) von dem Index s abhängen.

74.3 Beliebige beschränkte Integrationsbereiche in $\mathbb{R}^3$

Der Integralbegriff lässt sich problemlos für Funktionen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ erweitern, falls der Integrationsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beliebige Menge (also nicht unbedingt ein Quader) ist.

Es muss lediglich gefordert werden, dass die Menge $\mathcal{D}$ beschränkt ist. In diesem Fall gibt es sicher einen Quader der Form (74.2), der die Menge $\mathcal{D}$ umfasst, d. h. es gilt

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Q} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]. \tag{74.9}$$

Man erweitert dann den Definitionsbereich der zu integrierenden Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ zu

$$f^*(x) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \vec{x} \in \mathcal{D}, \\ 0, & \vec{x} \in \mathcal{Q},\ \vec{x} \notin \mathcal{D}. \end{cases} \tag{74.10}$$

Definition 74.3. Eine Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ mit einer beschränkten Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *integrierbar über* $\mathcal{D}$, falls die durch (74.9)–(74.10) definierte Erweiterung $f^* : \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ (mit einem Quader $\mathcal{Q} \supseteq \mathcal{D}$) integrierbar über $\mathcal{Q}$ ist. Man nennt dann

$$\int_{\mathcal{D}} f(\vec{x})\, d\vec{x} = \int_{\mathcal{Q}} f^*(\vec{x})\, d\vec{x} \tag{74.11}$$

das *Integral von f über $\mathcal{D}$*. △

Eine andere übliche Bezeichnungsweise für (74.11) ist *Riemann-Integral* anstelle Integral. In dem vorliegenden dreidimensionalen Fall sind *räumliches Bereichsintegral*, *Volumenintegral* oder *Doppelintegral* weitere gängige Bezeichnungen, wobei wir die letzte Bezeichnung weiter unten in einem anderen Kontext verwenden.

Weitere gängige Notationen für das Integral in (74.11) sind

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \text{ bzw. } \iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{74.12}$$

Bemerkung 74.4. a) Der Wert des Integrals in (74.11) ist unabhängig von der Wahl des umfassenden Quaders $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

b) Wir gehen noch kurz auf die Einheit des dreidimensionalen Integrals ein. Offenbar gilt für jede riemannsche Summe $[\, \mathcal{R}(f, \mathcal{Z}, \Theta) \,] = [\, f \,] \cdot [\, x \,] \cdot [\, y \,] \cdot [\, z \,]$, und dann muss für das Integral als Grenzwert riemannscher Summen Gleiches gelten:

$$\Big[\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \Big] = [\, f \,] \cdot [\, x \,] \cdot [\, y \,] \cdot [\, z \,].$$

Z. B. gilt also im Fall (es werden SI-Einheiten verwendet) $[\, x \,] = [\, y \,] = [\, z \,] = \mathrm{m}$ und $[\, f \,] = \mathrm{kg/m^3}$ die Identität $\Big[\iiint_{\mathcal{D}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \Big] = \mathrm{kg}$. △

Grundvoraussetzung für die in den nachfolgenden Abschnitten vorzustellenden Integrationsregeln wird sein, dass der betrachtete Integrationsbereich eine halbwegs vernünftige Gestalt besitzt. Mathematisch präzisiert wird das in der folgenden Definition.