

XII Die Poisson-Gleichung

94 Einführung

Die *Poisson-Gleichung* ist von der Form

$$\Delta u := \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(\vec{x}) \text{ für } \vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathcal{D}, \quad (94.1)$$

mit einer offenen beschränkten Menge $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$, wobei $d \geq 2$ gilt und die Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist, und die Funktion $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist zu bestimmen. Im Fall $f = 0$ spricht man von der *Laplace-Gleichung*. Die Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man *harmonische Funktionen*. Den Differenzialoperator Δ bezeichnet man als *Laplace-Operator*.

Die Poisson-Gleichung wird zum Beispiel in Verbindung mit Dirichlet-Randdaten

$$u = g \text{ auf } \partial\mathcal{D} \quad (94.2)$$

oder auch mit Neumann-Randdaten

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ auf } \partial\mathcal{D} \quad (94.3)$$

betrachtet, wobei $\partial\mathcal{D}$ den Rand der Menge \mathcal{D} bezeichnet.

Beispiel. Solche Probleme treten beispielsweise bei Wärmeleitungs- oder Diffusionsprozessen im stationären Fall auf, der meist bereits nach kurzer Zeit erreicht wird. In der ebenen inhomogenen Diffusionsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t)) + f(x, y)$ für $(x, y) \in \mathcal{D}$, $t > 0$ (siehe (82.6) auf Seite 236 für den eindimensionalen Fall) und hier nicht weiter spezifizierten Randbedingungen liegt beispielsweise im stationären Fall die Situation $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ vor, was gleichbedeutend mit (94.1) mit $d = 2$ ist. Δ

Für das nachfolgende Beispiel ist die folgende Identität von Bedeutung (nachrechnen!):

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi \text{ auf } \mathcal{D},$$

wobei $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion ist, mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$).

Beispiel. Ein weiteres Beispiel liefert die Strömungsmechanik. Dazu betrachten wir in einem Bereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) ein inkompressibles Fluid mit einer zeitlich stationären Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$. Dieses erfüllt die *Kontinuitätsgleichung* $\operatorname{div} \vec{u} = f$, wobei die Funktion $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ Quellen und Senken repräsentiert (siehe Abschnitt 91 auf Seite 256 ff). Ist nun das Geschwindigkeitsfeld \vec{u} ein Gradientenfeld (das gilt typischerweise für rotationsfreie Felder, siehe (93.1) auf der vorherigen Seite), so gilt $\vec{u} = \operatorname{grad} \varphi$ auf \mathcal{D} für eine zu bestimmende Funktion $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, und die Gleichung $\operatorname{div} \vec{u} = f$ geht dann über in die Poisson-Gleichung $\Delta \varphi = f$ auf \mathcal{D} , mit der gesuchten Funktion φ . Δ

95 Der rotationssymmetrische Fall

Es werden für den Torus

$$\mathcal{D} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d : r_{\min} \leq |\vec{x}| \leq r_{\max} \}$$

(mit $0 < r_{\min} < r_{\max}$ und $d \in \mathbb{N}$ fix) rotationssymmetrische Lösungen $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ der Laplace-Gleichung gesucht. Dies sind Lösungen von der Form

$$u(\vec{x}) = v(|\vec{x}|) \text{ für } \vec{x} \in \mathcal{D} \quad (95.1)$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $v : [r_{\min}, r_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$. Der Ansatz (95.1) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_k}(\vec{x}) &= v'(|\vec{x}|) \frac{x_k}{|\vec{x}|}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(\vec{x}) &= v''(|\vec{x}|) \frac{x_k^2}{|\vec{x}|^2} + v'(|\vec{x}|) \left(\frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{x_k^2}{|\vec{x}|^3} \right) \end{aligned}$$

und liefert

$$\begin{aligned} (\Delta u)(\vec{x}) &= v''(|\vec{x}|) \left(\sum_{k=1}^d \frac{x_k^2}{|\vec{x}|^2} \right) + v'(|\vec{x}|) \sum_{k=1}^d \left(\frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{x_k^2}{|\vec{x}|^3} \right) \\ &= v''(|\vec{x}|) + v'(|\vec{x}|) \left(\frac{d}{|\vec{x}|} - \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \\ &= v''(|\vec{x}|) + \frac{d-1}{|\vec{x}|} v'(|\vec{x}|). \end{aligned}$$

Die Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$v''(r) + \frac{d-1}{r}v'(r) = 0 \quad \text{für } r_{\min} < r < r_{\max} \quad (95.2)$$

lassen sich mit Satz 62.2 auf Seite 163 angewendet auf die Funktion $y = v'$ unmittelbar angeben. Man erhält so

$$v(r) = \begin{cases} c_1 + c_2 \ln r, & \text{falls } d = 2, \\ c_1 + c_2 r^{2-d} & \text{sonst} \end{cases} \quad (95.3)$$

mit reellen Konstanten c_1 und c_2 . Diese Funktionen v liefern genau die rotationssymmetrischen Lösungen (95.1) der Laplace-Gleichung. Die Konstanten c_1 und c_2 werden an die vorgegebenen Randdaten auf den Kreisen mit den Radien $r = r_{\min}$ und $r = r_{\max}$ angepasst.

Beispiel. Wir betrachten das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{auf } \mathcal{D} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d : 1 \leq |\vec{x}| \leq 2 \} \\ u(\vec{x}) &\equiv 3 \quad \text{für } |\vec{x}| = 1, \quad u(\vec{x}) \equiv 2 \quad \text{für } |\vec{x}| = 2. \end{aligned}$$

Für den zweidimensionalen Fall $d = 2$ ist die Situation in Abb. 182 dargestellt. Im dreidimensionalen Fall

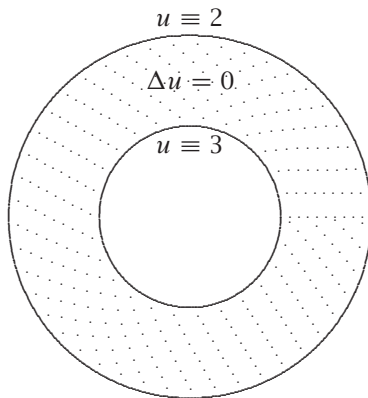


Abb. 182: Rotationssymmetrisches Randwertproblem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$d = 3$ ist die Lösung wegen der vorliegenden Rotationssymmetrie von Definitionsbereich und Randbedingungen von der Form $u(\vec{x}) = c_1 + c_2/|\vec{x}|$ für $\vec{x} \in \mathcal{D}$. Die Randbedingungen ergeben die beiden Gleichungen

$$c_1 + c_2 = 3, \quad c_1 + \frac{c_2}{2} = 2$$

mit den Lösungen $c_2 = 2$ und $c_1 = 1$. Die gesuchte Lösung ist damit von der Form

$$u(x, y, z) = 1 + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4. \quad \Delta$$

Bemerkung. Der vorgestellte Ansatz zur Gewinnung rotationssymmetrischer harmonischer Funktionen auf Kugeln

$$\mathcal{D} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d : |\vec{x}| \leq r_{\max} \} \quad (r_{\max} > 0 \text{ fix})$$

liefert außer den konstanten Lösungen keine weiteren Lösungen. Dies liegt daran, dass die sich ergebenden Funktionen (95.3) im Fall $d \geq 2$ singular sind. Δ

96 Der zweidimensionale Fall, Polarkoordinaten

96.1 Einführung

Bei der Betrachtung der ebenen Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (96.1)$$

auf Gebieten $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ wie z. B. Kreisen oder Kreisringen oder allgemeiner auf Kreisringsegmenten bietet sich die Verwendung von Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ u(x, y) &= U(r, \varphi), \quad f(x, y) = F(r, \varphi), \end{aligned} \quad (96.2)$$

an.

Satz 96.1. Mit den Notationen (96.2) geht (96.1) über in

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = F(r, \varphi) \quad (96.3)$$

für $r > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi \right) \cos \varphi \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin \varphi \right) \sin \varphi \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= - \left(- \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \varphi \right) \sin \varphi \\ &\quad + \left(- \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \cos \varphi \right) \cos \varphi - \Sigma \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} \cos^2 \varphi - \Sigma \end{aligned}$$

mit

$$\Sigma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \Sigma = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}.$$

Dies komplettiert den Beweis. \square

Bemerkung. Man beachte, dass der Ausdruck auf der linken Seite in (96.3) im Fall $U = U(r)$ (Rotationssymmetrie, es liegt keine Abhängigkeit von φ vor) wegen $\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$ mit dem Ausdruck (Fall $d = 2$) in (95.3) auf der vorherigen Seite übereinstimmt. \triangle

96.2 Die Laplace-Gleichung auf dem Kreis

Wir betrachten im Folgenden das Dirichletsche Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf einem Kreis,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ für } x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < R^2, \quad (96.4)$$

$$u = g(x, y) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = R^2. \quad (96.5)$$

Im Fall des Kreises mit Radius $R \geq 0$ und Mittelpunkt im Ursprung verwendet man die Polarkoordinatendarstellung (96.3) und erhält mit der Notation

$$u(x, y) = U(r, \varphi), \quad g(x, y) = G(\varphi) \quad (96.6)$$

Folgendes:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \text{ für } 0 < r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (96.7)$$

$$U(R, \varphi) = G(\varphi) \text{ für } 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (96.8)$$

Eine Familie von Lösungen dieses Problems wird mit dem Separationsansatz

$$U(r, \varphi) = S(r)\Phi(\varphi) \text{ für } 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

gewonnen. Aus (96.7) erhält man so

$$r^2 \frac{S''(r)}{S(r)} + r \frac{S'(r)}{S(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \mu$$

mit einem von r und φ unabhängigen Separationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$. Die separierten Gleichungen lauten dann

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \text{ für } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (96.9)$$

$$r^2 S'' + rS' - \mu S = 0 \text{ für } 0 \leq r \leq R, \quad (96.10)$$

mit einem noch zu spezifizierenden Separationsparameter μ . Eine notwendige Bedingung für Glattheit ist stetige Differenzierbarkeit der Funktion Φ sowie

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \quad (96.11)$$

Bei (96.9), (96.11) handelt es sich um ein Eigenwertproblem für eine gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Randbedingungen. Die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen lassen sich mit Hilfe eines Exponentialansatzes bestimmen und lauten

$$\mu_n = n^2, \quad \Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \text{ für } n = 0, 1, \dots$$

Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten (96.10) erhält man mit dem Ansatz

$$S(r) = r^\beta \quad (\beta \geq 0).$$

Die Restriktion $\beta \geq 0$ ist sinnvoll, da ansonsten eine Singularität bei $r = 0$ vorliegt. Zusammen mit der Setzung $\mu = n^2$ führt dies auf

$$\beta(\beta - 1)r^\beta + \beta r^\beta - n^2 r^\beta = (\beta^2 - n^2)r^\beta = 0$$

und ergibt

$$\beta = n.$$

Superposition liefert letztlich

$$U(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (96.12)$$

mit noch an die Randbedingungen anzupassenden Koeffizienten a_n und b_n . Hierzu gehen wir von einer Fourier-Entwicklung

$$G(\varphi) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (d_n \cos n\varphi + e_n \sin n\varphi) \text{ für } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (96.13)$$

aus. Man beachte, dass hier d_0 und nicht wie bisher $\frac{d_0}{2}$ verwendet wird. Ein Koeffizientenvergleich liefert unmittelbar

$$\begin{aligned} a_n &= R^{-n} d_n \quad \text{für } n = 0, 1, \dots, \\ b_n &= R^{-n} e_n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

und aus (96.12) erhält man dann

$$U(r, \varphi) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (d_n \cos n\varphi + e_n \sin n\varphi). \tag{96.14}$$

Die Fourier-Koeffizienten der Funktion G haben die Form

$$\begin{aligned} d_0 &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta) d\theta, \quad d_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ e_n &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} G(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{96.15}$$

Beispiel. Wir betrachten hier das Dirichletsche Randwertproblem (96.4)–(96.5) auf der vorherigen Seite für die Laplace-Gleichung mit der speziellen Randbedingung

$$g(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = 2 \cos^2(\varphi) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Unter Verwendung der Identität $2 \cos^2(\varphi) = 1 + \cos 2\varphi$ liefert ein Koeffizientenvergleich die Lösung

$$U(r, \varphi) = 1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\varphi. \quad \Delta$$

Einsetzen der Fourier-Koeffizienten aus (96.15) in Darstellung (96.14) liefert nach einigen Rechnungen Folgendes:

Satz 96.2. Für die Lösung des Randwertproblems (96.7)–(96.8) gilt mit den Notationen aus (96.6) auf der vorherigen Seite die Poisson-Formel

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \theta)} G(\theta) d\theta \quad \text{für } 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

96.3 Die Laplace-Gleichung auf einem Kreissektor

96.3.1 Separationsansatz

Wir betrachten im Folgenden ein Dirichlet-Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf

einem Kreissektor mit Öffnungswinkel π/b ($b > \frac{1}{2}$), Radius $R \geq 0$ und Mittelpunkt im Ursprung. In Polarkoordinatendarstellung (96.3) hat es die Form

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/b \tag{96.16}$$

$$U(R, \varphi) = G(\varphi) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi/b, \tag{96.17}$$

$$U(r, 0) = U(r, \pi/b) = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq R. \tag{96.18}$$

Eine Familie von Lösungen der Differenzialgleichung (96.16) wird mit dem Separationsansatz

$$U(r, \varphi) = S(r)\Phi(\varphi) \quad \text{für } 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/b$$

gewonnen. Aus (96.16) erhält man so wie beim Kreis die separierten Gleichungen

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0 \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi/b, \tag{96.19}$$

$$r^2 S'' + rS' - \mu S = 0 \quad \text{für } 0 \leq r \leq R \tag{96.20}$$

mit einem noch zu spezifizierenden Separationsparameter μ . Dazu gehören dann noch die Randbedingungen

$$\Phi(0) = \Phi(\pi/b) = 0. \tag{96.21}$$

Bei (96.19), (96.21) handelt es sich um ein Eigenwertproblem für eine gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit Nullrandbedingungen. Die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen lauten

$$\mu_n = (bn)^2, \quad \Phi_n(\varphi) = \sin(nb\varphi) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung (96.20) erhält man in der Form

$$S_n(r) = r^{bn} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Superposition ergibt dann

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{bn} \sin(nb\varphi) \tag{96.22}$$

mit noch an die Randbedingungen anzupassenden Koeffizienten a_n . Hierzu gehen wir von einer Fourier-Entwicklung

$$G(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nb\varphi) \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi/b \tag{96.23}$$

aus. Ein Koeffizientenvergleich liefert unmittelbar

$$a_n = R^{-bn} b_n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots,$$

und (96.22) geht dann über in

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{bn} b_n \sin(nb\varphi) \quad (96.24)$$

für $0 \leq \varphi \leq \pi/b, \quad 0 \leq r \leq r_{\max}$.

Die Fourier-Entwicklung für die Funktion G von der speziellen Form (96.24) erhält man wie üblich durch ungerade Fortsetzung von G auf das Intervall $[-\pi/b, 0]$.

96.3.2 Einspringende Ecken

Für $b < 1$ ist die Lösung U aus (96.24) im Fall $b_1 \neq 0$ nicht stetig differenzierbar. Hierzu betrachtet man in (96.24) den ersten Summanden (o.B.d.A. sei $b_1 = 1$ und $R = 1$)

$$U_1(r, \varphi) = r^b \sin b\varphi \quad \text{für } 0 \leq \varphi \leq \pi/b, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Hier gilt

$$\frac{\partial}{\partial r} U_1(r, \varphi) = br^{b-1} \sin b\varphi$$

für $0 \leq \varphi \leq \pi/b, \quad 0 < r \leq 1,$

so dass

$$\frac{\partial}{\partial r} U_1(r, \varphi) \rightarrow \infty \quad \text{für } r \rightarrow 0.$$

Allgemein können bei Gebieten mit einspringenden Ecken in der Ableitung der Lösung Singularitäten auftreten.

Für zwei Werte von b sind in den Abbildungen 183 und 184 die Funktionen $U_1(r, \varphi) = r^b \sin b\varphi$ für $0 \leq \varphi \leq \pi/b, 0 \leq r \leq 1$ mit Hilfe von Niveaulinien dargestellt. In Abbildung 183 geschieht dies für den Wert $b = \frac{3}{2}$, in Abbildung 184 für den Wert $b = \frac{10}{19}$. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich in der zweiten Situation - dort liegt eine einspringende Ecke vor - die Höhenlinien nahe dem Ursprunge stark verdichten.

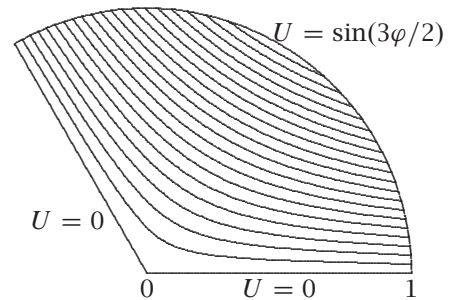


Abb. 183: Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf dem Kreissektor $\{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi/3, 0 < r \leq 1\}$

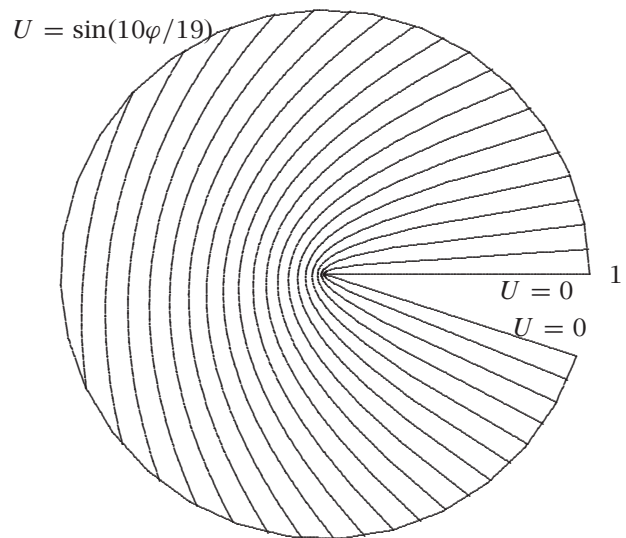


Abb. 184: Randwertproblem für die Laplace-Gleichung auf dem Kreissektor $\{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 19\pi/10, 0 < r \leq 1\}$

97 Die Laplace-Gleichung auf beschränkten Rechteckgebieten

Ziel der nachfolgenden Betrachtungen ist die Bestimmung von Lösungen $u : [0, L] \times [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$ der Laplace-Gleichung von der Form

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \text{ für } 0 < x < L, 0 < y < M \quad (97.1)$$

mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $X : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y : [0, M] \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $0 < L < \infty$ und $0 < M < \infty$ gilt. Der Ansatz (97.1) führt auf

$$(\Delta u)(x, y) = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) \stackrel{!}{=} 0 \text{ für } 0 < x < L, 0 < y < M.$$

Dies bedeutet

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \text{ für } 0 < x < L, 0 < y < M. \quad (97.2)$$

Für den Moment sei hierbei $X(x) \neq 0$ für $0 \leq x \leq L$ und $Y(y) \neq 0$ für $0 \leq y \leq M$ angenommen, wobei man diese Restriktion später auch wieder fallen lassen kann. Vergleichbar der Situation in (79.3) führt dies auf die Bedingungen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -s^2 \text{ für } 0 < x < L, 0 < y < M \quad (97.3)$$

mit einer noch zu spezifizierenden reellen Konstanten $s^2 > 0$. Denkbar wäre hier auch die Zulassung positiver Konstanten s bei gleichzeitigem Verzicht der Quadratbildung. Während der weiteren Rechnungen stellt sich jedoch heraus, dass sich damit keine weiteren Lösungen gewinnen lassen. Daher werden die Betrachtungen gleich auf negative Konstanten $-s^2$ beschränken, wobei sich durch die Verwendung von $s^2 > 0$ anstelle von $s > 0$ die Notation vereinfachen wird. Die Darstellung (97.3) führt unmittelbar auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} X''(x) + s^2 X(x) &= 0 \text{ für } 0 < x < L, \\ Y''(y) - s^2 Y(y) &= 0 \text{ für } 0 < y < M. \end{aligned}$$

Die allgemeinen Lösungen dieser gewöhnlichen Differenzialgleichungen sind von der Form

$$X_s(x) = a_1 \cos(sx) + a_2 \sin(sx), 0 \leq x \leq L, \quad (97.4)$$

$$Y_s(y) = b_1 \cosh(sy) + b_2 \sinh(sy), 0 \leq y \leq M. \quad (97.5)$$

Durch endliche oder abzählbare Überlagerung erhält man eine Klasse von Lösungen der Laplace-Gleichung,

$$\begin{aligned} u(x, y) = \sum_{s>0} (A_s \cos(sx) + B_s \sin(sx)) \\ \cdot (C_s \cosh(sy) + D_s \sinh(sy)) \quad (97.6) \\ \text{für } 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq M. \end{aligned}$$

Durch Restriktion an die Wahl von s beziehungsweise Anpassung der Koeffizienten lassen sich dann wie üblich noch gegebene Randbedingungen erfüllen.

Beispiel 97.1. Es wird das folgende Randwertproblem für die Laplace-Gleichung betrachtet:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0, 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq M, \\ u(0, y) = u(L, y) = 0, 0 \leq y \leq M, \\ u(x, M) = g(x), u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (97.7)$$

Die Situation ist in Abb. 185 dargestellt.

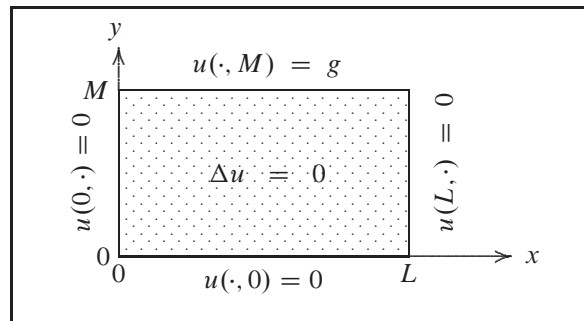


Abb. 185: Ein Randwertproblem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung

Ansätze der Form $X_s(x)Y_s(y)$ mit Funktionen X_s und Y_s aus (97.4) beziehungsweise (97.5) erfüllen die Randbedingungen links und rechts, falls

$$X_s(0)Y_s(y) = X_s(L)Y_s(y) = 0 \text{ für } 0 \leq y \leq M.$$

Das bedeutet

$$X_s(0) = A_s = 0, \quad X_s(L) = B_s \sin(sL) = 0,$$

was für

$$sL \in \{ \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \}$$

erfüllt ist. Die untere Randbedingung ist gleichbedeutend mit

$$X_s(x)Y_s(0) = 0 \text{ für } 0 \leq x \leq L \rightsquigarrow Y_s(0) = C_s = 0.$$

Damit gewinnt man Lösungen von der Form

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cdot \sinh\left(n\frac{\pi}{L}y\right) \\ \text{für } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq M.$$

Nun müssen die Koeffizienten noch an die obere Randbedingung angepasst werden. Hierzu geht man von einer Fourier-Entwicklung

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \text{ für } 0 \leq x \leq L$$

aus. Es gilt

$$u(x, M) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cdot \sinh\left(n\frac{\pi}{L}M\right) \\ \text{für } 0 \leq x \leq L,$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert dann

$$a_n \sinh\left(n\frac{\pi}{L}M\right) = c_n \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

Die Fourier-Entwicklung der Funktion g gewinnt man wie üblich durch ungerade Fortsetzung auf das Intervall $[-L, 0]$, mit dem Ergebnis

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(\xi) \sin\left(n\frac{\pi}{L}\xi\right) d\xi \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

Für die Darstellung der Lösung des vorgegebenen Problems (97.7) für die Laplace-Gleichung erhält man dann die Darstellung

$$u(x, y) = \int_0^L K(x, y, \xi) g(\xi) d\xi \quad (97.8) \\ \text{für } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq M,$$

mit der Kernfunktion

$$K(x, y, \xi) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh\left(n\frac{\pi}{L}y\right)}{\sinh\left(n\frac{\pi}{L}M\right)} \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \sin\left(n\frac{\pi}{L}\xi\right).$$

△