

- Es wird $\text{rot } \vec{u}$ als *Rotationsfeld* bezeichnet.
- Im Fall $\text{rot } \vec{u} \equiv \vec{0}$ wird das Vektorfeld \vec{u} als *wirbelfrei* bezeichnet.

Falls \vec{u} das Geschwindigkeitsfeld eines stationären Fluids beschreibt, so kann der Vektor $\text{rot } \vec{u}(\vec{x})$ zur Angabe des Spins verwendet werden, den ein Fluidelement im Punkt $\vec{x} \in \mathcal{D}$ erfährt. Einzelheiten dazu finden Sie in Bemerkung 92.9 auf Seite 264.

Beispiel. Beispiele für wirbelfreie Vektorfelder sind gegeben durch differenzierbare Vektorfelder, deren k -te Komponente lediglich von der Variablen x_k abhängt, es gilt also

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(y) \\ u_3(z) \end{pmatrix}.$$

Zwei einfache Beispiele sind

$$\vec{u}(\vec{x}) \equiv \vec{c} \text{ in } \mathbb{R}^3, \quad \vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die rechts vorliegende Situation ist in Abbildung 175 dargestellt. △

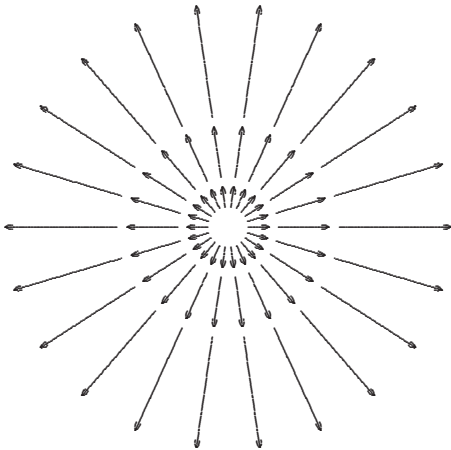


Abb. 175: Lineare Ausdehnung in der Ebene

Beispiel. Eine wichtige Klasse von Beispielen liefern differenzierbare ebene Vektorfelder

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = (x, y, z) \in \mathcal{D}.$$

Es liegt also keine z -Abhängigkeit vor, und die dritte Komponente von \vec{u} verschwindet. Üblicherweise liest dabei die Menge \mathcal{D} in der x - y -Ebene. In diesem Fall gilt

$$\text{rot } \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \end{pmatrix}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad \Delta$$

Beispiel 92.2 (Scherströmung). Wir betrachten hier das ebene Vektorfeld

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das als *Scherströmung* bezeichnet wird. Dafür gilt

$$\text{rot } \vec{u} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wie man leicht nachrechnet. Die vorliegende Situation ist in Abbildung 176 dargestellt.

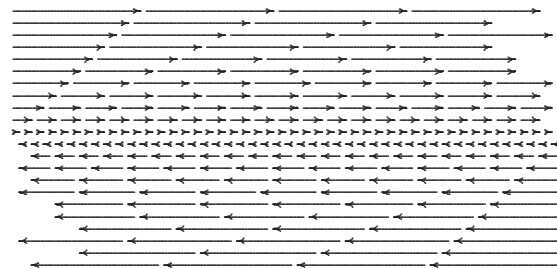


Abb. 176: Scherströmung in der Ebene △

Bemerkung 92.3. Die notwendige Bedingung aus Satz 71.13 auf Seite 197 für die Existenz eines Potentials ist im dreidimensionalen Fall gleichbedeutend mit Rotationsfreiheit auf dem betrachteten Bereich, wie man direkt sieht. Auf sternförmigen Gebieten oder allgemeiner noch auf einfach zusammenhängenden Gebieten impliziert Rotationsfreiheit demnach die Existenz eines Potentials (siehe Satz 71.19 und Bemerkung 71.20 auf Seite 199). Man spricht im Fall eines strömenden Fluids dann von einer *Potentialströmung*. △

Beispiel 92.4 (Potentialwirbelströmung). Wir betrachten nun die ebene Strömung

$$\vec{u}(x, y, z) = \vec{u}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(x, y, z) \in \mathcal{D} := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Hier gilt

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

das betrachtete Vektorfeld ist daher wirbelfrei, d. h. es gilt $\text{rot } \vec{u} \equiv \vec{0}$. Die vorliegende Situation ist in Abbildung 177 dargestellt.

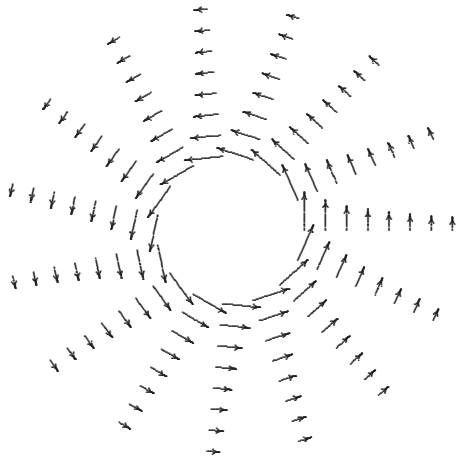


Abb. 177: Potenzialwirbelströmung in der Ebene

Die Bezeichnung «Potenzialwirbelströmung» für dieses Vektorfeld \vec{u} ist allerdings nur teilweise gerechtfertigt. So stellt z. B. die Funktion $f(x, y, z) = -\arctan(\frac{y}{x}) + c$ ein Potenzial dar, das allerdings für $x = 0$ (also in der y - z -Ebene) nicht definiert ist. Man beachte, dass der Definitionsbereich \mathcal{D} von \vec{u} nicht sternförmig und auch nicht einfach zusammenhängend ist. \triangle

Beispiel 92.5 (Starre Rotation). Wir betrachten nun für einen festen Vektor $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\omega} \times \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Dadurch wird eine starre Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{\omega}|$ um die Drehachse $\{\alpha \vec{\omega} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ beschrieben, wobei die Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn verläuft. Es gilt hier

$$\frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \equiv \vec{\omega},$$

wie man leicht nachrechnet. Das betrachtete Vektorfeld besitzt also ein konstantes Rotationsfeld, das bis auf einen konstanten Faktor mit dem Drehvektor $\vec{\omega}$ übereinstimmt.

Die vorliegende Situation ist in Abbildung 178 für den Vektor $\vec{\omega} = (0, 0, 1)^\top$ und Punkte $\vec{x} = (x, y, 0)$ in der x - y -Ebene dargestellt. Man beachte, dass in diesem Fall $\vec{u}(x, y, z) = (-y, x, 0)^\top$ gilt.

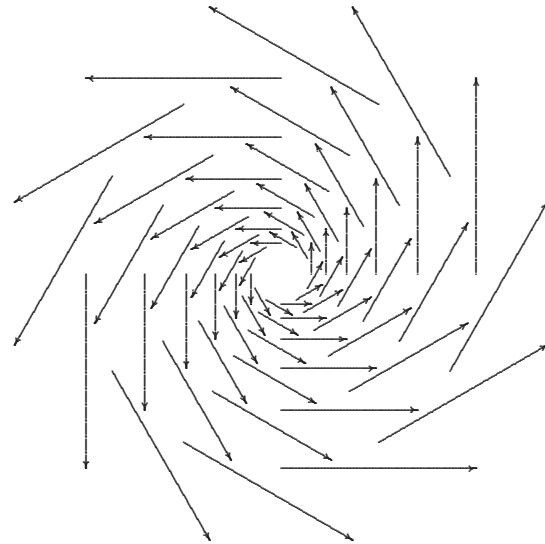


Abb. 178: Starre Rotation in der x - y -Ebene mit Drehvektor $\vec{\omega} = (0, 0, 1)^\top$

\triangle

Bemerkung 92.6. Im Folgenden wird für ein stationäres Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eines Fluids mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ gezeigt, dass $\text{rot } \vec{u}$ zur Angabe einer Dichtefunktion zur Bestimmung der lokalen Zirkulation des Fluids verwendet werden kann.

Dazu wird für einen Punkt $\vec{x} \in \mathcal{D}$ zur Vereinfachung der Betrachtungen eine Umgebung in Form eines kleinen Rechtecks \mathcal{R} herangezogen, das parallel zur x - y -Ebene verläuft und Kanten der Länge Δx und Δy besitzt. Der Punkt $\vec{x} = (x, y, z)$ bilde den Mittelpunkt des Rechtecks. Die vorliegende Situation ist in Abbildung 179 dargestellt.

Als Maß für die lokale Zirkulation soll das Integral $\int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$ verwendet werden, wobei der Rand \mathcal{C} des betrachteten Rechtecks \mathcal{R} entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Für die weiteren Betrachtungen nehmen wir der Einfachheit halber noch an, dass \vec{u} nicht von z abhängt und betrachten die Zerlegung

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4$$

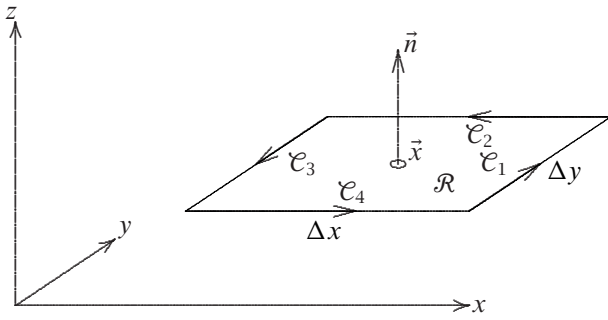


Abb. 179: Illustration zur lokalen Zirkulation

gemäß Abbildung 179. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{u} \cdot d\vec{s} &= \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} u_2(x + \frac{\Delta x}{2}, \eta) d\eta \\ &\approx u_2(x + \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y, \\ \int_{\mathcal{C}_2} \vec{u} \cdot d\vec{s} &= - \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} u_1(\xi, y + \frac{\Delta y}{2}) d\xi \\ &\approx -u_1(x, y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x, \\ \int_{\mathcal{C}_3} \vec{u} \cdot d\vec{s} &= - \int_{y-\frac{\Delta y}{2}}^{y+\frac{\Delta y}{2}} u_2(x - \frac{\Delta x}{2}, \eta) d\eta \\ &\approx -u_2(x - \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y, \\ \int_{\mathcal{C}_4} \vec{u} \cdot d\vec{s} &= \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} u_1(\xi, y - \frac{\Delta y}{2}) d\xi \\ &\approx u_1(x, y - \frac{\Delta y}{2}) \Delta x. \end{aligned}$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_1} \vec{u} \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}_3} \vec{u} \cdot d\vec{s} &\approx (u_2(x + \frac{\Delta x}{2}, y) - u_2(x - \frac{\Delta x}{2}, y)) \Delta y \\ &\approx \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) \Delta x \Delta y, \\ \int_{\mathcal{C}_2} \vec{u} \cdot d\vec{s} + \int_{\mathcal{C}_4} \vec{u} \cdot d\vec{s} &\approx -(u_1(x, y + \frac{\Delta y}{2}) - u_1(x, y - \frac{\Delta y}{2})) \Delta x \\ &\approx -\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Abschließend erhält man so die Näherung

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{s} &\approx \underbrace{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right)}_{=\text{rot } \vec{u}(x, y) \cdot \vec{n}} \underbrace{\Delta x \Delta y}_{=\mu(\mathcal{R})} \\ &\approx \int_{\mathcal{R}} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{\sigma}, \end{aligned} \quad (92.2)$$

wobei $\vec{n} = (0, 0, 1)^\top$ gilt und sich die positive Seite des Rechtecks \mathcal{R} oben befinde. Dies zeigt, dass in der vor-

liegenden Situation $\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n}$ eine Dichtefunktion für die Zirkulation pro Flächen- und Zeiteinheit darstellt.

Diese Betrachtungen lassen sich völlig analog auf kleine Rechtecke erweitern, die parallel zur x - z -Ebene oder zur y - z -Ebene liegen. Weitere Erweiterungen auf beliebig gelegene Rechtecke beziehungsweise gekrümmte Flächen sind ebenfalls möglich. Δ

92.2 Satz von Stokes

Das folgende Theorem erweitert die Betrachtungen aus Bemerkung 92.6 auf der vorherigen Seite für beliebige räumliche Flächen.

Satz 92.7 (Satz von Stokes). *Es sei $\vec{u} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit offenem beschränktem Definitionsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$ eine orientierte Fläche mit Rand \mathcal{C} . Dann gilt*

$$\int_{\mathcal{A}} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{s}, \quad (92.3)$$

wobei \mathcal{C} entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werde.

Wegen des Satzes von Stokes ist folgende Definition plausibel:

Definition 92.8. In der Situation von Satz 92.7 wird der Integrand $\text{rot } \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x})$ des Integrals auf der linken Seite von (92.3) als *Zirkulationsdichte* des betrachteten Fluids in $\vec{x} \in \mathcal{A}$ bezüglich der orientierten Fläche \mathcal{A} bezeichnet. Dabei gibt $\vec{n}(\vec{x})$ Normalenvektor in \vec{x} an. Δ

Bemerkung (Satz von Stokes für ebene Strömung). Im Fall einer Strömung \vec{u} in der x - y -Ebene (es liegt bei \vec{u} dann keine z -Abhängigkeit vor) gilt für eine Fläche \mathcal{A} in dieser Ebene und mit einer oben liegenden Seite Folgendes:

$$\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y},$$

denn in der vorliegenden Situation gilt $\vec{n} = (0, 0, 1)^\top$. Der stokesische Integralsatz wird in diesem Spezialfall zu

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) d\sigma &= \int_a^b u_1(\vec{\gamma}(t)) \gamma_1'(t) + u_2(\vec{\gamma}(t)) \gamma_2'(t) dt. \end{aligned} \quad (92.4)$$

Hierbei ist $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufende Parametrisierung des Randes \mathcal{C} der Fläche \mathcal{A} .

Man beachte noch, dass die Identität (92.4) mit der zweidimensionalen Variante des gausschen Integralsatzes übereinstimmt, wenn man diesen auf das Vektorfeld $\vec{v} = (u_2, -u_1)$ anwendet. Umgekehrt lässt sich auch der stokesche Integralsatz in der Ebene aus der zweidimensionalen Version des gausschen Integralsatzes herleiten. Δ

Bemerkung (Beweisidee zu Satz 92.7). Die Plausibilität der Aussage von Satz 92.7 wurde im Fall eines kleinen Rechtecks bereits in Bemerkung 91.2 erläutert. Im Fall einer allgemeinen Fläche $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ wird die Aussage des Satzes plausibel, wenn man \mathcal{A} durch eine Vereinigung \mathcal{A}_j für $j = 1, 2, \dots, n$ passender kleiner Rechtecke annähert. Dies liefert $\mathcal{A} \approx \cup_{j=1}^n \mathcal{A}_j$ und damit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} &\approx \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{A}_j} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \\ &\approx \sum_{j=1}^n \int_{\mathcal{C}_j} \vec{u} \cdot d\vec{s} \approx \int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{s}, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{C}_j \subseteq \mathbb{R}^3$ die Randkurve von \mathcal{A}_j bezeichnet. Man hat bei der letzten Approximation noch zu beachten, dass sich die Integrale über innere Randkurven gegenseitig wegheben. Die Situation ist in Abbildung 180 dargestellt. Die Pfeile geben dabei die Orientierung der Ränder an.

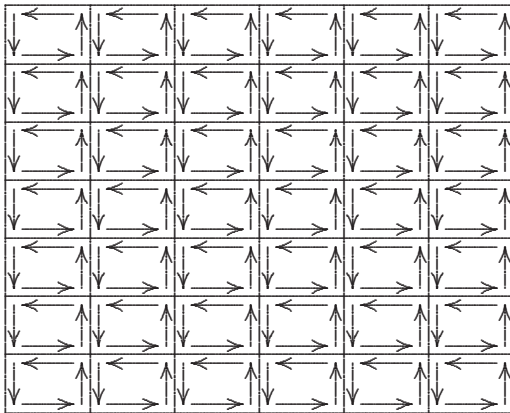


Abb. 180: Illustration zum Satz von Stokes

Δ

Beispiel. Wir betrachten hier das Parallelogramm

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left\{ \begin{pmatrix} -\xi + 3\eta \\ 1 + \xi + \eta \\ 2 - 2\eta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: T(\xi, \eta)} + \xi \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Es soll die Zirkulation des Vektorfeldes

$$\vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ x + y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

entlang des Randes \mathcal{C} von \mathcal{A} berechnet werden. Dabei sei die Orientierung der Fläche \mathcal{A} so gewählt, dass der Normalenvektor eine positive z -Komponente besitze.

Hierzu berechnen wir zunächst die Rotation von \vec{u} sowie das Kreuzprodukt der das Parallelogramm aufspannenden Vektoren:

$$\text{rot } \vec{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2x + y \\ 1 - z \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi, \eta) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt besitzt eine negative z -Komponente; daher ist im weiteren Verlauf das Negative dieses Kreuzproduktes zu betrachten. Das ergibt mit der Notation $(x, y, z) = T(\xi, \eta)$ Folgendes:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{u}(x, y, z) \cdot \left(-\frac{\partial T}{\partial \xi}(\xi, \eta) \times \frac{\partial T}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right) &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2x + y \\ 1 - z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(2 - 2x + y - 2z) \\ &= 2(2 - 2(-\xi + 3\eta) + 1 + \xi + \eta - 2(2 - 2\eta)) \\ &= 2(3\xi - \eta - 1). \end{aligned}$$

Daraus erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \vec{u} \cdot d\vec{s} &= \int_{\mathcal{A}} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} = 2 \int_0^1 \int_0^1 (3\xi - \eta - 1) d\xi d\eta \\ &= 2 \left(3 \frac{\xi^2}{2} \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} - \frac{\eta^2}{2} \Big|_{\eta=0}^{\eta=1} - 1 \right) \\ &= 2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1 \right) = 0. \end{aligned} \tag{92.5}$$

Man beachte, dass sich für die Zirkulation um die Fläche \mathcal{A} der Wert null ergibt, obwohl das betrachtete Vektorfeld nicht wirbelfrei ist. Δ

Bemerkung 92.9. Es sei $\vec{u} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit offenem beschränktem Definitionsbereich $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$, das das stationäre Geschwindigkeitsfeld eines Fluids beschreibe. Weiter sei $\vec{x} \in \mathcal{D}$. Im Folgenden wird ein anderer Zugang gewählt, um ein Maß für den Spin eines sich zu einem Zeitpunkt in \vec{x} befindlichen Fluidteilchens in einer beliebig vorgegebenen, durch \vec{x} verlaufenden orientierten Ebene $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^3$ anzugeben. Diese Ebene werde durch einen Normalenvektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\vec{n}| = 1$ beschrieben.

Hierzu betrachten wir für jedes $r > 0$ den Kreis \mathcal{A}_r in der vorgegebenen Ebene mit Mittelpunkt \vec{x} und Radius r . Weiter bezeichne \mathcal{C}_r den Rand des Kreises. Es gilt also

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r &= \vec{x} + \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} \perp \vec{n}, |\vec{y}| \leq r \}, \\ \mathcal{C}_r &= \vec{x} + \{ \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} \perp \vec{n}, |\vec{y}| = r \}. \end{aligned}$$

Die vorliegende Situation ist in Abbildung 181 dargestellt.

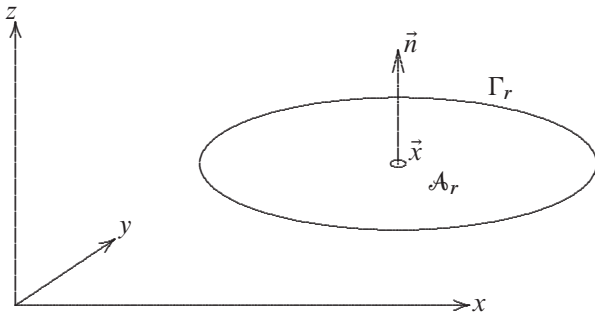


Abb. 181:

Das skalierte Arbeitsintegral $\frac{1}{2\pi r} \int_{\mathcal{C}_r} \vec{u} \cdot d\vec{s}$ kann als mittlere Rotationsgeschwindigkeit entlang \mathcal{C}_r interpretiert werden. Dabei wird der Rand \mathcal{C}_r entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen. Eine Division dieses Wertes durch r ergibt $\frac{1}{2\pi r^2} \int_{\mathcal{C}_r} \vec{u} \cdot d\vec{s}$ und bedeutet entsprechend die mittlere Winkelgeschwindigkeit entlang \mathcal{C}_r .

Durch Grenzübergang $r \rightarrow 0$ erhält man ein Maß für den Spin des Fluidteilchens im betrachteten Punkt \vec{x} bezüglich der betrachteten Ebene \mathcal{E} in Form einer Winkelgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r^2} \int_{\mathcal{C}_r} \vec{u} \cdot d\vec{s} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r^2} \int_{\mathcal{A}_r} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi r^2} \mu(\mathcal{A}_r) \text{rot } \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n}, \end{aligned}$$

wobei $\mu(\mathcal{A}_r)$ den Flächeninhalt des Kreises \mathcal{A}_r bezeichnet; dieser Wert ist πr^2 .

Dieser Wert für die Winkelgeschwindigkeit stimmt bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ mit der entsprechenden Zirkulationsdichte überein (siehe Definition 92.8 auf Seite 262). △

93 Einige Eigenschaften von Divergenz div und Rotation rot

a) Divergenz div und Rotation rot lassen sich suggestiv in der folgenden Form schreiben:

$$\text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u}, \quad \text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u}, \quad \text{mit } \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet $\vec{u} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein differenzierbares Vektorfeld, mit $d = 3$ im zweiten Fall. Es wird hier das Skalar- beziehungsweise das Kreuzprodukt zweier Vektoren gebildet, wobei der erste Vektor Differentialoperatoren als Einträge besitzt, und der zweite Vektor besteht aus den Komponenten des Vektorfeldes \vec{u} .

b) Divergenz div und Rotation rot sind lineare Differentialoperatoren, d. h. für differenzierbare Vektorfelder $\vec{u}, \vec{v} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{div}(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \alpha \text{div } \vec{u} + \beta \text{div } \vec{v}, \\ \text{rot}(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) &= \alpha \text{rot } \vec{u} + \beta \text{rot } \vec{v}, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Fall $d = 3$ angenommen wird.

c) Für eine zweimal stetig differenzierbare skalare Funktion $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt (das folgt sofort aus dem Satz von Schwarz (siehe Satz 57.3 auf Seite 149))

$$\text{rot grad } \varphi = \vec{0}. \tag{93.1}$$

Gradientenfelder sind also wirbelfrei (siehe dazu auch Bemerkung 92.3 auf Seite 260).

d) Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{u} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt

$$\text{div rot } \vec{u} = 0.$$

Rotationsfelder sind also divergenzfrei.