Aussagen, Definitionen

- *Hauptsatz*, *Fundamentaltheorem*: Besonders wichtiges Resultat.
- *Satz*, *Theorem*: Formuliert wichtiges Resultat.
- *Proposition*: Enthält wie ein Theorem eine Aussage. Ist aber weniger bedeutend als ein Theorem.
- *Lemma*: Hilfsresultat, wird für Beweis eines Theorems benötigt.
- *Definition*: Für Vergabe von Bezeichnungen oder Abkürzungen.

Implikationen

Mathematische Theoreme und Propositionen sind von der Form

$$\text{Voraussetzung } p \Longrightarrow \text{Resultat } q. \qquad (*)$$

Übliche Sprechweisen für $(*)$:

- p ist hinreichende Bedingung für q.
- Sei p erfüllt. Dann gilt q.
- q ist notwendige Bedingung für p.
- Aus p folgt q.
- q gilt dann, wenn p gilt.

Für $(*)$ kann man auch „$q \Longleftarrow p$“ schreiben.

Definition

Die Äquivalenz

$$\text{Aussage } q \iff \text{Aussage } p$$

gilt per Definition, falls die Implikationen $p \Longrightarrow q$ und $q \Longrightarrow p$ beide erfüllt sind.

Beispiel

Betrachte für ganze Zahl n die Aussagen

$$\begin{aligned} &\text{Aussage } p: && \text{es ist } n \text{ gerade.} \\ &\text{Aussage } q: && \text{es ist } n^2 \text{ gerade.} \end{aligned}$$

Man kann zeigen: beide Aussagen sind äquivalent, d. h. $p \iff q$.

Menge

- Eine *Menge* ist Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte, auch *Elemente* genannt.
- Die Eigenschaft, Element einer Menge zu sein, wird mit $\in$ gekennzeichnet. Eigenschaft „nicht Element" wird mit $\notin$ gekennzeichnet.
- Beschreibung einer Menge z.B. durch Angabe der Elemente, mit geschweiften Klammern als Begrenzer.

Beispiel

Es ist $M := \{0, 1, 2, 3\}$ Menge mit vier Elementen. Es gilt z. B. $0 \in M$ und $1 \in M$. Mögliche Sprechweisen: „0 in M" oder „1 Element M". Es gilt $4 \notin \{0, 1, 2, 3\}$.

Notationen für Mengen

- Mengen werden meist mit Großbuchstaben bezeichnet.
- Bei Definitionen steht der Doppelpunkt auf der Seite des Gleichheitszeichens, auf der das zu definierende Symbol steht, z. B. $\{0, 2, 5, 9\} =: A$ oder $A := \{0, 2, 5, 9\}$.
- Für mehrere Elemente einer Menge schreibt man abkürzend etwa

$$a, b, c \in A$$

anstelle $a \in A, b \in A, c \in A$.

Gleichheit Mengen

- Zwei Mengen A und B sind *gleich*, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, in Symbolen:

$$\forall x : \quad (x \in A \Longleftrightarrow x \in B).$$

Man schreibt dann $A = B$.
- Sind zwei Mengen A und B nicht gleich, so schreibt man $A \neq B$.

Dabei bezeichnet $\forall$ den *Allquantor*. Er steht für „für alle“.

Anmerkungen

- Reihenfolge der Aufzählung ohne Bedeutung. Z. B. gilt $\{0, 1, 2, 3\} = \{1, 0, 3, 2\}$.
- Eine Menge ist Ansammlung *verschiedener* Objekte. Wiederholte Angabe ist jedoch zulässig. Aber z. B. gilt $\{1, 2\} = \{1, 2, 1\}$, und $\{a, b, c\}$ bedeutet im Fall $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$ die Menge $\{1, 2\}$.

Gelegentlich wird die *leere Menge* verwendet: $\varnothing := \{\,\}$.

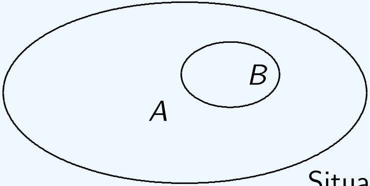
Teilmenge

B heißt *Teilmenge* der Menge A, wenn

$$\forall x : x \in B \Longrightarrow x \in A$$

oder $\forall x \in B : x \in A$. Notation (alle äquivalent): $B \subseteq A, \; A \supseteq B$.

Illustration



Situation $B \subseteq A$

Beispiele

- Leere Menge ist immer Teilmenge: $\varnothing \subseteq A$ für jede Menge A.
- Die Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$ sind

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}.$$

Zahlenmengen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \qquad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Elemente von $\mathbb{N}$: natürliche Zahlen
Elemente von $\mathbb{Z}$: ganze Zahlen
Elemente von $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen, Brüche.

Brüche kann man miteinander addieren und multiplizieren.
Für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $c \neq 0, d \neq 0$ gelten folgende Identitäten:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad + bc}{cd}, \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} - \frac{bc}{cd} = \frac{ad - bc}{cd},$$
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \qquad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc} \quad (b \neq 0).$$

Reelle Zahlen

In $\mathbb{Q}$ z. B. $x^2 = 2$ nicht lösbar, deshalb reelle Zahlen $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x &= \sigma \cdot b_m b_{m-1} \dots b_0, c_1 c_2 c_3 \dots \\ &= \sigma \Big(b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \dots + b_0 10^0 \\ &\qquad + c_1 10^{-1} + c_2 10^{-2} + c_3 10^{-3} + \dots \Big) \end{aligned}$$

mit:

$b_0, b_1, \dots, b_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$	(Ziffern vor dem Komma, $b_m \neq 0$)
$c_1, c_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$	(Nachkommastellen),
$\sigma \in \{+, -\}$	(Vorzeichen)
$m \in \mathbb{N}_0$, von x abhängig	(Zahl der Ziffern vor Komma).

Theorem

Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und deren Operationen Addition und Multiplikation ($+$ beziehungsweise $\cdot$) stellen eine Erweiterung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und deren Operationen $+$ und $\cdot$ dar. Es gilt Folgendes:

a) $x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x \qquad (x, y \in \mathbb{R}$ beliebig$)$,
b) $(x + y) + z = x + (y + z), \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
$(x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig$)$,
c) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x, y, z \in \mathbb{R}$ beliebig$)$,
d) es gilt $x + 0 = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$,
e) es gilt $1 \cdot x = x$ für jedes $x \in \mathbb{R}$,
f) es gibt zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $x' \in \mathbb{R}$ mit $x + x' = 0$,
g) es gibt zu jedem $0 \neq x \in \mathbb{R}$ ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot \tilde{x} = 1$.

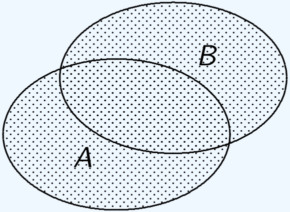
Die in a) und b) genannten Eigenschaften nennt man *Kommutativitätsgesetze*, und c) heißt *Distributivgesetz*. Die in f) und g) eingeführten Zahlen heißen *negative* beziehungsweise *inverse* Elemente.

Vereinigung Teil 1

Die *Vereinigungsmenge* von A und B besteht aus allen Elementen von A und B. Notation $A \cup B$. Sprechweise: A vereinigt B. Formel:

$$A \cup B := \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}.$$

Illustration Vereinigung



$A \cup B$, punktiert

Durchschnitt Teil 1

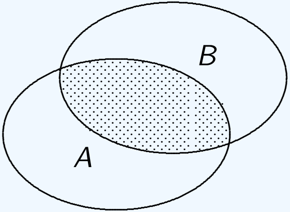
(i) Durch

$$A \cap B := \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$$

ist der *Durchschnitt* von A und B definiert. Sprechweise: A geschnitten B.

(ii) Gilt $A \cap B = \varnothing$, so nennt man A und B *disjunkt*.

Illustration Durchschnitt



$A \cap B$, punktiert

Beispiele Vereinigung, Durchschnitt

Es gilt

$$\{1,3,6\} \cup \{2,6\} = \{1,2,3,6\}, \qquad M \cup \varnothing = M,$$
$$\{1,3,6\} \cap \{2,6\} = \{6\}, \qquad M \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$\mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{N}_0.$$

Vereinigung Teil 2

Für Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist durch

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n &= \bigcup_{j=1}^{n} A_j \\ &= \{\, x \mid x \in A_j \text{ für mindestens einen Index } j \,\} \end{aligned}$$

die *Vereinigung* der A_j definiert.

Durchschnitt Teil 2

Für Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist durch

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n &= \bigcap_{j=1}^{n} A_j \\ &= \{\, x \mid x \in A_j \text{ für alle } j \text{ mit } 1 \le j \le n \,\} \end{aligned}$$

der *Durchschnitt* der A_j definiert.

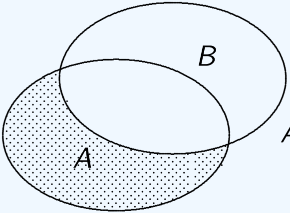
Differenz Mengen

Seien A, B zwei Mengen. Dann ist

$$A \backslash B := \{ x \in A \mid x \notin B \}$$

die *Mengendifferenz* von A und B. Sprechweise: A ohne B.

Illustration



$A \backslash B$, punktiert

Beispiel

Für $A = \{2, 3, 6\}$ und $B = \{2, 5, 7\}$ ist $A \backslash B = \{3, 6\}$.

Rechengesetze Mengenoperationen

Für Mengen A, B, C gilt Folgendes:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Kommutativgesetze :} & A \cup B = B \cup A, \;\; A \cap B = B \cap A, \\
\text{Assoziativgesetze :} & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \\
 & A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \\
\text{Distributivgesetze :} & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\
 & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
\text{Gesetze von de Morgan:} & C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B), \\
 & C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B).
\end{array}
$$

Produktmenge

(i) Seien A, B Mengen. Die *Produktmenge* $A \times B$, auch *kartesisches Produkt* genannt, ist Menge aller geordneten Paare (a, b) aus Elementen von $A \times B$, formal

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, \ \ b \in B \}.$$

(ii) Für n Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kann man analog die geordneten n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_k \in A_k$ für $k = 1, \ldots, n$ betrachten. Das kartesische Produkt

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1 \times \cdots \times A_n$$

der A_k ist die Menge aller geordneten n-Tupel von obiger Form, d. h.

$$\prod_{k=1}^{n} A_k := \{ (a_1, \ldots, a_n) \mid a_k \in A_k \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n \}.$$

Produktmenge Fortsetzung

Für

$$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{-mal}}$$

schreibt man kurz A^n, also z. B. $A \times A = A^2$.

Beispiel

Für $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$ ist

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$A^2 = \Big\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\Big\}.$$

Es ist

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

und allgemein für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Später wird allerdings auch die Menge der Vektoren mit n reellen Einträgen mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Regeln zur Ordnung

Für reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt Folgendes:

a) Es gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$,
b) aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$,
c) aus $x \leq y$ folgt $x + z \leq y + z$,
d) aus $x \leq y$ und $0 \leq z$ folgt $x \cdot z \leq y \cdot z$.

Notationen zur Ordnung

Für reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ schreibt man:

$$y \geq x, \text{ falls } x \leq y,$$

$$x < y, \text{ falls } x \leq y \text{ und } x \neq y,$$

$$x > y, \text{ falls } y < x.$$

Schranken

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ Teilmenge.

(i) Gilt für eine Zahl $x \in \mathbb{R}$

$$a \le x \text{ für jedes } a \in A,$$

so heißt x *obere Schranke* von A.

(ii) *Untere Schranken* von Mengen sind analog definiert. Man hat in (i) nur „$\le$“ durch „$\ge$“ zu ersetzen.

(iii) Es heißt die Menge A *nach oben (unten) beschränkt*, falls sie eine obere (untere) Schranke besitzt. Sie heißt *beschränkt*, falls sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beispiel

- Für Menge $A = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$ obere Schranke, und jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $y \leq 0$ ist untere Schranke. Es ist also die Menge A beschränkt.
- Die Menge $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt, mit denselben unteren und oberen Schranken wie A.
- Die Menge $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ ist nach unten beschränkt, nicht jedoch nach oben.
- Die Menge $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

sup, inf, max, min

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$.

(i) Sei A nach oben beschränkt, und für $x \in \mathbb{R}$ gelte:

- x ist obere Schranke von A,
- jedes $y \in \mathbb{R}$ mit $y < x$ ist nicht obere Schranke von A.

Dann heißt x *kleinste obere Schranke* oder *Supremum* von A. Notation: $x = \sup A$.

(ii) Analog *größte untere Schranke* oder *Infimum* von A. Notation: $x = \inf A$.

(iii) Ist $x \in \mathbb{R}$ Supremum von A und gilt $x \in A$, so heißt x *Maximum* von A. Notation: $x = \max A$.

(iv) Ist $x \in \mathbb{R}$ Infimum von A und gilt $x \in A$, so heißt x *Minimum*. Notation: $x = \min A$.

Beispiel

Seien wieder

$$A = \{ a \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a \leq 1 \} \subseteq \mathbb{R}, \qquad B = \{ 1/n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Es gilt

$$0 = \inf A = \inf B, \quad 1 = \sup A = \sup B.$$

Für die Menge A sind die Zahlen 1 und 0 sogar Maximum beziehungsweise Minimum. Für die Menge B ist 1 Maximum, aber 0 ist wegen $0 \notin B$ kein Minimum von B.

Das folgende Theorem garantiert z. B. die Lösbarkeit von $x^2 = 2$.

Theorem

Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum, und jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Intervalle auf $\mathbb{R}$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\},$$
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}, \quad (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}.$$

$[a, b]$ heißt *abgeschlossenes Intervall*, $(a, b]$ und $[a, b)$ sind *halboffene Intervalle*, und (a, b) heißt *offenes Intervall*.

Einseitig und *zweiseitig unendliche Intervalle*:

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \quad (-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\},$$
$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\},$$

und $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$. Dabei: $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Funktion

Seien A, B Mengen.

(i) *Funktion* oder *Abbildung* f von A nach B: Ist Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b = f(a) \in B$ zuordnet.

(ii) Es heißt $f(a)$ *Wert von f an Stelle a* bzw. *Bild von a unter f*. Es heißt a *Urbild von b unter f*.

(iii) A: *Definitionsmenge* oder *-bereich* von f.
B heißt *Zielmenge* oder *-bereich* von f.

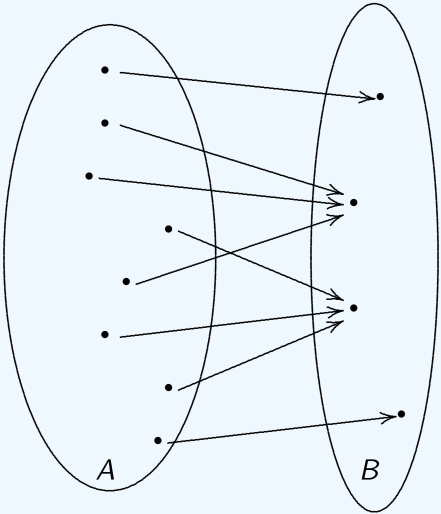
Bemerkung

- Man schreibt zumeist $f : A \to B$.
- Notation $a \mapsto f(a)$: $a \in A$ wird $f(a) \in B$ zugeordnet.
- Ausführliche Notation:

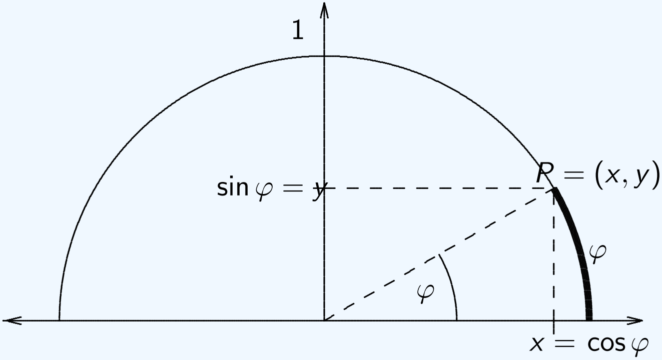
$$f : A \to B, a \mapsto \ldots \quad \text{bzw.} \quad f : A \to B, f(a) = \ldots,$$

wobei $\ldots$ durch konkrete Abbildungsvorschrift zu ersetzen.

Beispiel Abbildung



Beispiel Sinus



Situation für $0 < \varphi < \pi/2$

Graph

Der *Graph* einer Funktion $f : A \to B$ ist definiert durch

$$G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B.$$

Beispiel

Betrachte

$$f : A \to B \text{ mit } A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\},$$
$$f(1) = a, f(2) = b, f(3) = a.$$

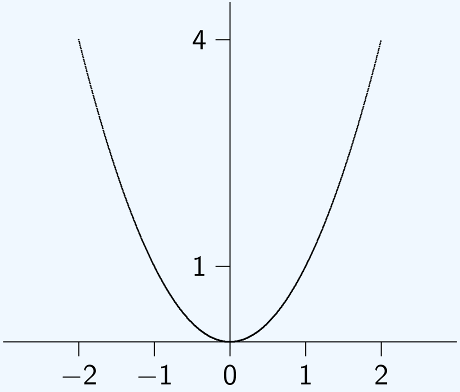
Hier ist

$$G = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}.$$

Für Intervalle A, B kann der Graph als Kurve im kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden.

Beispiel

Sei $A = B = \mathbb{R}$ und $f : x \mapsto x^2$. Es gilt $G = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es gilt also z. B. $(0,0) \in G, (-1,1) \in G$ und $(2,4) \in G$.
Funktionsverlauf:



Bildmenge einer Funktion

Sei $f : A \to B$ Abbildung, $M \subseteq A$. Man nennt

$$f(M) := \{\, b \in B \mid \exists\, a \in M : f(a) = b \,\} \;=\; \{\, f(a) \mid a \in M \,\}$$

das *Bild der Menge M unter f*.

Urbildmenge einer Funktion

Sei $f : A \to B$ Abbildung. Für $N \subseteq B$ sei

$$f^{-1}(N) := \{\, a \in A \mid f(a) \in N \,\}.$$

Sprechweise: *Urbild der Menge N unter f*.

Beispiel

Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

- Für $M = [-1, 1)$ ist $f(M) = [0, 1]$.
- Für $N = [-9, 9)$ gilt $f^{-1}(N) = (-3, 3)$.
- Es ist $f^{-1}(\{9\}) = \{-3, 3\}$ und $f^{-1}(\{-1\}) = \varnothing$.

Umkehrbarkeit einer Funktion

Funktion $f : A \to B$ heißt *umkehrbar* (auch *bijektiv*), falls:

a) Jedes Element $b \in B$ wird von f höchstens einmal getroffen wird, besitzt also höchstens ein Urbild. In Symbolen:

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

b) Jedes Element $b \in B$ wird von f getroffen, besitzt also mindestens ein Urbild. In Symbolen:

$$\forall b \in B \, \exists \, a \in A : f(a) = b.$$

Bemerkung

- Bezeichnungen für Eigenschaften: a) *injektiv*, b) *surjektiv*.
- Äquivalente Formulierung für Eigenschaft a):

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2).$$

In Worten: verschiedene Urbilder haben verschiedene Bilder.

Beispiel

Für jede Menge A ist die *identische Funktion*, kurz Identität, definiert durch

$$1_A : A \to A, \ \ a \mapsto a.$$

Sie ist umkehrbar. Andere übliche Notationen: $\mathrm{id}_A, \mathrm{id}$.

Reellwertige Funktionen mit gleichen Definitionsbereichen lassen sich addieren und subtrahieren, mit Skalaren multiplizeren, miteinander multiplizieren und dividieren:

Definition

Es seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : A \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei A eine Menge ist.

a) Die Funktionen $f + g : A \to \mathbb{R}$ und $f - g : A \to \mathbb{R}$ sind folgendermaßen erklärt:

$$(f \pm g)(a) = f(a) \pm g(a), \quad a \in A.$$

b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha f : A \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert:

$$(\alpha f)(a) = \alpha f(a), \quad a \in A.$$

c) Die Funktion $fg : A \to \mathbb{R}$ is so definiert:

$$(fg)(a) = f(a)g(a), \quad a \in A.$$

Hintereinanderausführung von Funktionen

Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Die *Verknüpfung von f und g* ist definiert durch

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Andere Bezeichnungen: *Hintereinanderausführung von f und g* beziehungsweise *Verknüpfung von f mit g*. Eine Sprechweise für $g \circ f$ ist g Kringel f.

Umkehrfunktion

Es sei $f : A \to B$ umkehrbar. Die *Umkehrfunktion zu f* ist

$$f^{-1} : B \to A, \ f(a) \mapsto a. \qquad (*)$$

Andere Bezeichnungsweise: *inverse Abbildung zu f*.

Bemerkung

a) Setzung $(*)$ nur für umkehrbare f sinnvoll.

b) Beachte: i. Allg. Umkehrfunktion $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

c) Für Intervalle A und B: Graph der Umkehrfunktion = Spiegelung des Graphen von $f : A \to B$ an Diagonale $y = x$.

d) Beachte: $f^{-1}(N)$ für $N \subseteq B$ ist auch das Urbild von N unter f. Hierbei muss f nicht umkehrbar sein.

e) Für eine umkehrbare Funktion $f : A \to B$ gilt

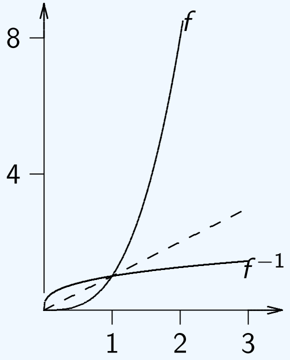
$$f^{-1}(f(a)) = a \qquad (a \in A), \qquad f(f^{-1}(b)) = b \qquad (b \in B).$$

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b \qquad (a \in A, b \in B).$$

Beispiel

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^n$ eine umkehrbare Funktion. Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y} \text{ für } y \geq 0.$$



Darstellung der Funktionen $f(x) = x^3$ und f^{-1}

Theorem

Für zwei umkehrbare Funktionen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist auch die Funktion $g \circ f : A \to C$ umkehrbar, und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Beispiel

Die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R}\backslash\{5\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \mapsto x - 5,$$
$$g : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \mapsto 1/x,$$

sind umkehrbar. Die dazugehörigen Umkehrfunktionen sind

$$f^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{5\},\ y \mapsto y + 5,$$
$$g^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ y \mapsto 1/y.$$

Für die Verknüpfung gilt

$$g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{5\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \mapsto 1/(x - 5). \qquad (*)$$

Es ist $(*)$ umkehrbar, und für $(g \circ f)^{-1} : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{5\}$ gilt

$$(g \circ f)^{-1}(y) = 5 + \frac{1}{y}, \quad 0 \neq y \in \mathbb{R}.$$

Monotonie von Funktionen

Es sei $f : A \to B$ eine Abbildung mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}$ und Wertebereich $B \subseteq \mathbb{R}$. Es heißt die Funktion f

a) *monoton wachsend*, falls $f(x) \le f(y)$ für $x < y$ gilt;
b) *streng monoton wachsend*, falls $f(x) < f(y)$ für $x < y$ gilt;
c) *monoton fallend*, falls $f(x) \ge f(y)$ für $x < y$ gilt;
d) *streng monoton fallend*, falls $f(x) > f(y)$ für $x < y$ gilt.

Beispiel

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n$ und ebenso ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \sqrt[n]{y}$ streng monoton wachsend.
b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4$ ist monoton wachsend.

Bemerkung

Es sei $f : A \to B$ eine Funktion mit Definitionsbereich $A \subseteq \mathbb{R}$ und Wertebereich $B \subseteq \mathbb{R}$.

a) Ist f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, so ist sie auch injektiv.
b) Ist dann noch f surjektiv, d. h. ist Eigenschaft b) aus diesem Satz erfüllt, so ist f auch umkehrbar.

Infimum, Supremum, Maximum, Minimum von Funktionen

Es sei $f : A \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit einem Definitionsbereich A. Man schreibt

$$\inf_{x \in \mathcal{M}} f(x) := \inf f(\mathcal{M}), \quad \sup_{x \in \mathcal{M}} f(x) := \sup f(\mathcal{M}),$$

$$\min_{x \in \mathcal{M}} f(x) := \min f(\mathcal{M}), \quad \max_{x \in \mathcal{M}} f(x) := \max f(\mathcal{M}),$$

Bezeichnungen der Reihe nach: *Infimum*, *Supremum*, *Minimum* und *Maximum* von f. Notwendige Voraussetzungen zur Existenz dieser Werte dabei angenommen.

Beispiel

Tafel

Beispiel

Ein Polynom n-ten Grades (mit $n \in \mathbb{N}$) hat die Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

mit $n + 1$ Termen, die summiert werden. Hier: $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind reelle *Koeffizienten*, mit $a_n \neq 0$. Eine Kurzschreibweise ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \qquad (*)$$

a) Es ist dabei k *Laufindex* oder *Summationsindex*.
b) Variable k nimmt alle ganzen Zahlen an, beginnend mit unterer Grenze (hier 0) und endend mit oberer Grenze (hier n).
c) Es ist $(*)$ Summe der hinter dem Summenzeichen auftretenden Terme, hier $a_k x^k$. Der Laufindex nimmt alle in b) beschriebenen Werte an.
d) Anzahl der Summanden ist obere Grenze minus untere Grenze plus 1.

Bemerkung

a) Laufvariablen dürfen umbenannt werden. Es ist also z. B. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$.

b) Indexverschiebungen sind ebenfalls zulässig. So gilt z. B.

$$\sum_{k=3}^{9} a_k = \sum_{j=1}^{7} a_{j+2},$$

wie man anhand der Setzung $k = j + 2$ erkennt. Die neuen Grenzen für j erhält man durch Einsetzen:

- untere Grenze: $3 = k = j + 2$, also $j = 1$,
- obere Grenze: $9 = k = j + 2$, also $j = 7$.

c) Die Summe ist per Definition $= 0$, falls die untere Grenze größer als die obere Grenze ist.

Verallgemeinerungen Summennotation

Der Ausdruck

$$\sum_{k \in I} a_k$$

definiert Summe der Terme $a_k, \ k \in I$ wobei I beliebige endliche Indexmenge.
Entsprechende Notationen für Produkte (Produktzeichen Π) sowie Durchschnitte und Vereinigungen von Mengen ($\cap$ beziehungsweise $\cup$).

Beispiel

$\prod_{k=1}^{4} b_k = b_1 b_2 b_3 b_4$.

Das leere Produkt wird als 1 festgelegt. So gilt z. B. $\prod_{k=1}^{0} x_k = 1$.

Rechenregeln

Unter Umständen lassen sich gewisse Terme vor das Verknüpfungszeichen ziehen. Vereinfachungen sind möglich bei *Teleskopsummen*:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) &= \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{a_3} - \cancel{a_2} \\ &\qquad + \cdots + \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}} + a_n - \cancel{a_{n-1}} \\ &= a_n - a_0.\end{aligned}$$

Analog lassen sich *Teleskopprodukte* berechnen:

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}.$$

Fakultät

Fakultät $n!$ (sprich n Fakultät) einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist rekursiv definiert durch

$$0! := 1, \qquad (n+1)! := (n+1)n!, \;\; n = 0, 1, \ldots \;. \qquad (*)$$

Bemerkung

a) Eine *rekursive Darstellung* eines Ausdrucks $A(n)$ ist eine Vorschrift zur Berechnung von $A(n)$ mit Hilfe der Vorgänger $A(n-1), A(n-2)$, usw.
In $(*)$ ist $A(n) = n!$, die Berechnungsvorschrift lautet

$$A(0) = 0! = 1, \qquad A(n+1) = (n+1)A(n) \text{ für } n = 0, 1, \ldots \;.$$

b) Man spricht von einer *geschlossenen Darstellung* für $A(n)$, falls $A(n)$ ohne Bezugnahme auf Vorgänger dargestellt wird.

Beispiel

Es ist $n! = \prod_{i=1}^{n} i$ geschlossene Darstellung für $n!$. Dies ist = Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte hintereinander anzuordnen.

Doppelsummen

Gelegentlich treten Doppelsummen der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} a_{k\ell} \qquad (*)$$

auf mit $a_{k\ell} \in \mathbb{R}$ für $k = 1, 2, \ldots, n, \ell = 1, 2, \ldots, m$.

Zunächst werden dabei für $k = 1, 2, \ldots, n$ die inneren Summen $b_k = \sum_{\ell=1}^{m} a_{k\ell}$ berechnet, danach die äußeren Summen $\sum_{k=1}^{n} b_k$. Das Ergebnis stimmt mit $(*)$ überein.

Es kommt in $(*)$ nicht auf Reihenfolge der Summation an. Zulässige Kurznotation ist daher

$$\sum_{k,\ell} a_{k\ell},$$

wobei dann aus dem Kontext ersichtlich werden muss, welchen Bereich die Laufindizes durchlaufen.

Distributivgesetz $\rightsquigarrow$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{\ell=1}^{m} b_\ell\Big) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m} a_k b_\ell,$$

wobei $a_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, und $b_\ell \in \mathbb{R}$ für $\ell = 1, 2, \ldots, m$.

Polynome

Reelles Polynom p:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \ldots, n$. Notation: $n = \operatorname{grad} p$, falls $a_n \neq 0$. Menge aller Polynome ist $\mathcal{P}$.

Summe zweier Polynome

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{s=0}^{r} (a_s + b_s) x^s \text{ mit } r := \max\{\, m, n \,\},$$

wobei $a_s = 0$ für $s > n$ und $b_s = 0$ für $s > m$.

Skalare Vielfache von Polynomen

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha a_k x^k \text{ für } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Man schreibt kurz $-p = (-1)p$ und $p - q = p + (-q)$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\,(p+q) &\le \max\{\operatorname{grad}\, p, \operatorname{grad}\, q\}, \\ \operatorname{grad}\,\alpha p &= \operatorname{grad}\, p \text{ für } p, q \in \mathcal{P}, 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Rechenregeln für Polynome

Für $p, q, r \in \mathcal{P}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$p + q = q + p, \qquad (p+q)+r = p+(q+r),$$
$$p + 0 = p, \qquad p - p = 0,$$
$$(\alpha\beta)p = \alpha(\beta p), \qquad \alpha(p+q) = \alpha p + \alpha q, \qquad 1p = p.$$

Multiplikation zweier Polynome

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big) \cdot \Big(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\Big) = \sum_{s=0}^{n+m} c_s x^s$$

$$\text{mit } c_s = \sum_{r=0}^{s} a_{s-r} b_r,$$

wobei $a_t = 0$ für $t > n$ und $b_t = 0$ für $t > m$.
Insbesondere $c_{n+m} = a_n b_m$, $\quad$ grad $(pq) =$ grad $p +$ grad q.

Rechenregeln für Polynome Teil 2

a)	$pq = qp$	b)	$1p = p$
c)	$p(qr) = (pq)r$	d)	$p(q+r) = pq + pr$

wobei 1 das *Einspolynom* $1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots$ bezeichnet.

Division mit Rest für Polynome

Zu $p, q \in \mathcal{P}$, $q \neq 0$, gibt es eindeutig bestimmte $s, r \in \mathcal{P}$ mit

$$p = sq + r \quad \text{und} \quad \text{grad } r < \text{grad } q$$

Beispiel

$$\overbrace{2x^3 + x^2 + 3x}^{= p} : \overbrace{(x^2 + 1)}^{= q} = \overbrace{2x + 1}^{= s} + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

beziehungsweise

$$2x^3 + x^2 + 3x = (2x + 1)(x^2 + 1) + \overbrace{x - 1}^{= r}.$$

Schema zur Berechnung

$$
\begin{array}{rrrrl}
(2x^3 & +x^2 & +3x & &) : (x^2+1) = 2x + 1 + \dfrac{x-1}{x^2+1} \\
-(2x^3 & & +2x &) & \\ \hline
 & x^2 & +x & & \\
 & -(x^2 & & +1) & \\ \hline
 & & x & -1 &
\end{array}
$$

Betrag, Vorzeichen

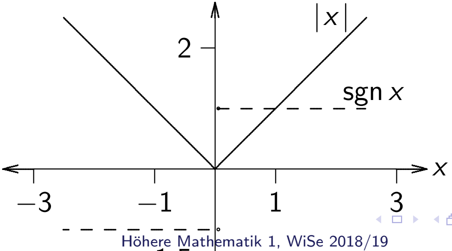
Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0, \\ -x & \text{sonst.} \end{cases}$$

der *Betrag* von x, und

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

nennt man *Vorzeichen* von x.



Eigenschaften Betrag

Für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = 0 \iff x = 0,$$
$$|xy| = |x| \cdot |y|,$$
$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

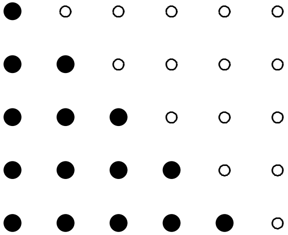
Weitere Anmerkungen:

- Den Betrag $|x - y|$ ist Abstand von x zu y.
- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Es gilt die *umgekehrte Dreiecksungleichung*:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Beispiel zur Induktion

$$
\begin{aligned}
1 &= 1 &&= 1\\
1+2 &= 3 &&= \tfrac{2(2+1)}{2}\\
1+2+3 &= 6 &&= \tfrac{3(3+1)}{2}\\
1+2+3+4 &= 10 &&= \tfrac{4(4+1)}{2}\\
1+2+3+4+5 &= 15 &&= \tfrac{5(5+1)}{2}.
\end{aligned}
$$



Summation der ersten fünf Zahlen aus $\mathbb{N}$

Proposition

Es gilt für $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prinzip der vollständigen Induktion

für den Beweis einer von n abhängigen Aussage $\mathrm{A}(n), n = n_0, n_0 + 1, \ldots$:

Induktionsanfang: Weise Aussage $\mathrm{A}(n_0)$ nach.
Induktionsschritt: für $n = n_0, n_0 + 1, \ldots$ weise nach:
Ist $\mathrm{A}(n)$ (=*Induktionsannahme*) wahr, so auch $\mathrm{A}(n+1)$.

Binomialkoeffizient

Der *Binomialkoeffizient* für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist definiert durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Praktische Berechnung mit Kürzen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)}{k!}.$$

Beispiel

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 2} = \frac{\cancelto{5}{10} \cdot 9}{\cancel{2}} = 45,$$

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{17!3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancelto{3}{18} \cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!3 \cdot 2}} = 20 \cdot 19 \cdot 3 = 20 \cdot 57 = 1140.$$

Theorem

Für die Binomialkoeffizienten gilt die Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k} := \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, n, \\ n = 0, 1, \ldots . \end{array}$$

Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n = 0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n = 1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n = 2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n = 3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n = 4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n = 5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n = 6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Beweis des Theorems: Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \qquad \text{(nach Def.)}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k)!k!} + \frac{n!k}{(n-k+1)!(k-1)!k} \qquad \text{(Erweitern)}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k!} \qquad \text{(Definition Fakultät)}$$

$$= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{(n-k+1)!k!} \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$

$$= \frac{n!(n-\cancel{k}+1+\cancel{k})}{(n-k+1)!k!} \qquad \text{(Ausklammern)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k} \qquad \text{(Definition Binomialkoeffizient).}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Binomische Formel

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Vollständige Induktion über n. *Induktionsanfang*: es gilt $(x+y)^0 = 1$, und

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1.$$

Induktionsannahme: Es sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}(x+y) \quad \text{(Annahme)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \quad \text{(Ausmultiplizieren)}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} y^{n-(\ell-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \qquad (\ell = k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\overbrace{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}^{=\binom{n+1}{k}} \Bigg) x^k y^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1=\binom{n+1}{n+1}} x^{n+1} y^0 + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1=\binom{n+1}{0}} x^0 y^{n+1}$$

(Rückbenennung $k = \ell$, Zusammenfassung)

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.$$

Das war zu beweisen.