Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

02. Februar 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Lösungsvorschläge zum Zusatzblatt

Aufgabe 49

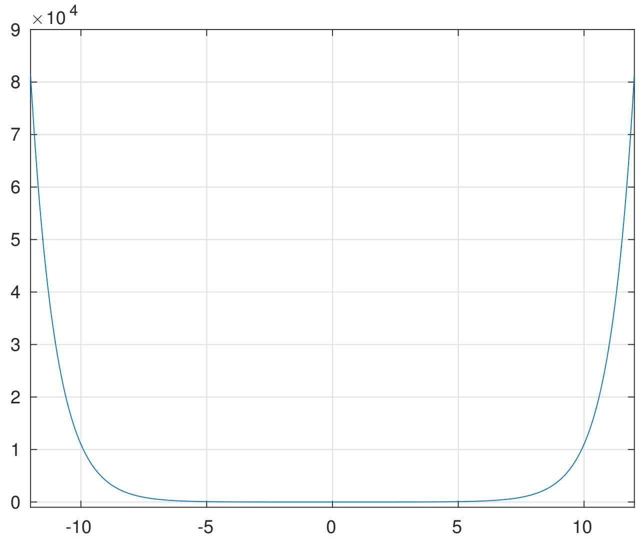

Abbildung 1: a) $\cosh(x)$

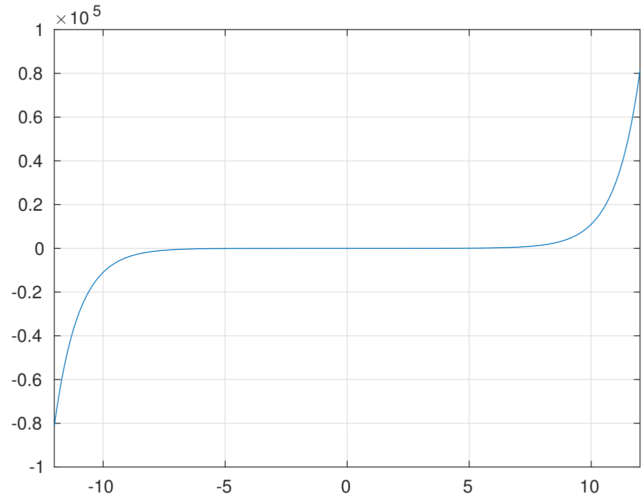

Abbildung 2: b) $\sinh(x)$

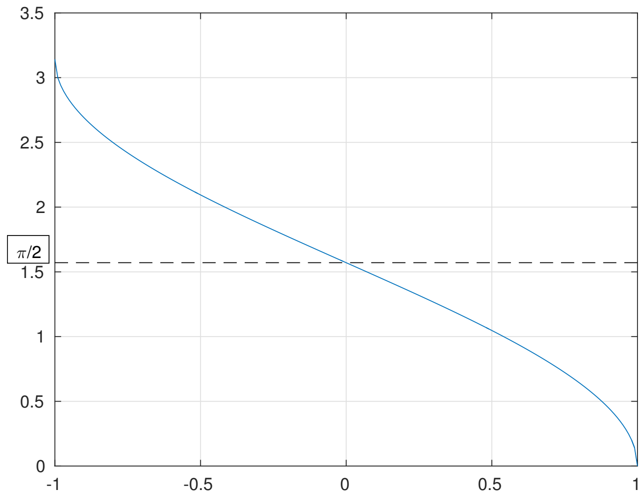

Abbildung 3: c) $\arccos(x)$

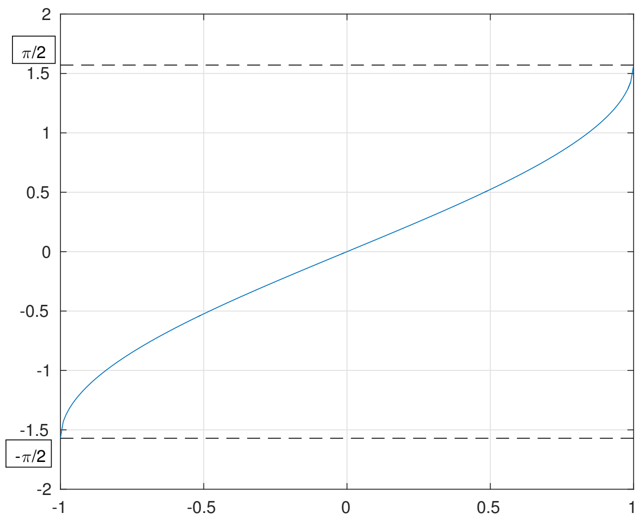

Abbildung 4: d) $\arcsin(x)$

a) Symmetrie zur y-Achse

b) Punktsymmetrie zum Ursprung, Monotonie

c) Punktsymmetrie zum Ursprung, Monotonie, $\arccos(-1) = \pi,\ \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

d) Punktsymmetrie zum Ursprung, Monotonie, $\arcsin(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2},\ \arcsin(0) = 0$

Aufgabe 50

Es gilt: $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} = \frac{1}{2}$.

a) $\underline{k = 0}$: $a_j^k = 1 \ \Rightarrow\ R = 1$ ($R =$ Konvergenzradius).
$\underline{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$: $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|^k} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \left(\sqrt[j]{|a_j|}\right)^k$. Achtung: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die GWS hier nicht gelten. Aber: $\left(\sqrt[j]{|a_j|}\right)^k = \underbrace{\sqrt[j]{|a_j|}\cdots\sqrt[j]{|a_j|}}_{k \text{ Faktoren}}$ mit identischen Häufungswerten der Faktoren.
$\Rightarrow \overline{\lim_{j\to\infty}} \left(\sqrt[j]{|a_j|}\right)^k = \left(\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|}\right)^k = \dfrac{1}{2^k}$.
$\Rightarrow R = 2^k$ (gilt auch für $k = 0$).

b) $\underline{k = 0}$: $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^{kj} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$. Da $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists j_0 : \sqrt[j]{|a_j|} < \frac{1}{2} + \varepsilon\ \forall j \geq j_0$.
$\varepsilon := \frac{1}{4}, \forall j \geq j_o : \sqrt[j]{|a_j|} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =: q < 1$.
$\Rightarrow$ mit Wurzelkriterium folgt absolute Konvergenz $\forall z \in \mathbb{C}\ \Rightarrow R = +\infty$.
$\underline{k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$: $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^{kj} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j (z^k)^j$ konvergent für alle $z^k \in \{w \in \mathbb{C} \big| |w| < 2\}$, divergent falls $|z^k| > 2$.
$\Leftrightarrow \forall\ z \in \mathbb{C}$ mit $|z|^k = |z^k| < 2$ konvergent
$\Leftrightarrow \forall\ z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt[k]{2}$ konvergent $\Leftrightarrow R = \sqrt[k]{2}$.

c) Zu zeigen: $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|j^k a_j|} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|}$ (Achtung: Im Allgemeinen gelten die GWS hier nicht.)
1. Fall: Sei u ein Häufungswert von $\sqrt[j]{|a_j|}$
$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\left(\sqrt[j_l]{|a_{j_l}|}\right)_j \overset{l\to\infty}{\to} u$.
$\Rightarrow \sqrt[j_l]{|j_l^k a_{j_l}|} = \underbrace{\left(\sqrt[j_l]{j_l}\right)^k}_{\to 1\ (l\to\infty)} \sqrt[j_l]{|a_{j_l}|} \overset{l\to\infty}{\to} u$.
$\to u$ Häufungswert von $\sqrt[j]{j^k |a_j|}$.
2. Fall: Sei u ein Häufungswert von $\sqrt[j]{j^k |a_j|}$
$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\sqrt[j_l]{j_l^k |a_{j_l}|} \overset{l\to\infty}{\to} u$.
$\to \sqrt[j_l]{j_l^k |a_{j_l}|} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[j_l]{j_l^k}} \overset{l\to\infty}{\to} u$.
$\Rightarrow u$ Häufungswert von $\sqrt[j]{|a_j|}$.
$\Rightarrow \sqrt[j]{|a_j|}$ und $\sqrt[j]{j^k |a_j|}$ haben exakt die gleichen Häufungswerte.
$\Rightarrow \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|j^k a_j|} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} = \frac{1}{2}$.
$\Rightarrow R = 2$.

Aufgabe 51

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

a) $f(2x) = 2^\alpha f(x)$.
$\Rightarrow f(2x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^n x^n \stackrel{!}{=} 2^\alpha f(x) = 2^\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 2^\alpha x^n$.
$\stackrel{\text{Identitätssatz}}{\Rightarrow} a_n 2^n = a_n 2^\alpha \;\forall\; n \in \mathbb{N}_0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} : f \equiv 0 \text{ (alle } a_n = 0) \\ \alpha \in \mathbb{N} : \quad \underbrace{a_n = 0}_{} \quad \forall n \neq \alpha, f(x) = a_\alpha x^\alpha, a_\alpha \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\ \quad \hookrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow R = +\infty \end{cases}$$

b) $-\lambda \cdot a_n = a_{n+1}(n+1) \forall n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: $a_n = \frac{(-\lambda)^n}{n!} a_0$ (Beweis per Induktion).
Ind.anf.: $n = 0$: $a_0 = \frac{(-\lambda)^0}{0!} \cdot a_0$ ✓
Ind.vor.: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
Ind.schr.: $a_{n+1} = \frac{-\lambda}{n+1} a_n \stackrel{I.V.}{=} \frac{-\lambda}{n+1} \cdot \frac{(-\lambda)^n}{n!} \cdot a_0 = \frac{(-\lambda)^{n+1}}{(n+1)!} a_0$.
$\Rightarrow f(x) = a_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} x^n = a_0 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\lambda x)^n = a_0 e^{-\lambda x}, a_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. $\Rightarrow R = +\infty$.

Aufgabe 52

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \stackrel{\text{Produktregel}}{=} f' \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)'.$$

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{1}{h} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)} = -\underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g \text{ diffbar}} \underbrace{\frac{1}{g(x+h) \cdot g(x)}}_{g \text{ stetig}}$$

$$\stackrel{h\to 0}{\to} -g'(x) \frac{1}{g^2(x)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} + \frac{f(x)(-g'(x))}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Die rechts- bzw. linksseitige Ableitung erhält man analog mit $\lim\limits_{h\to 0\pm}$.

Aufgabe 53 (ehemalige Klausuraufgabe)

a) Richtig sind die Aussagen (2), (4), (5) und (6).

b) Es gilt: Lipschitz $\Rightarrow$ gleichmäßig stetig, Lipschitzstetig $\Rightarrow$ stetig, gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ stetig.
stetig $\not\Rightarrow$ Lipschitzstetig: $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\; x \mapsto \sqrt{x}$,
stetig $\not\Rightarrow$ gleichmäßig stetig: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\; x \mapsto \frac{1}{x}$,
gleichmäßig stetig $\not\Rightarrow$ Lipschitzstetig: $f : [0,1] \to \mathbb{R},\; x \mapsto \sqrt{x}$.

Aufgabe 54 (ehemalige Klausuraufgabe)

Nullstellen des Nenners: $x_1 = 0$
$x^2 - 4x - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3,\; x_2 = 5,\; x_3 = -1.$
Zähler: $x^3 - 5x^2 = x^2(x-5)$.
$\Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2(x-5)}{x(x-5)(x+1)} = \dfrac{x}{x+1}$.
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \frac{5}{6} = \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty,\; \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty.$

Aufgabe 55 (ehemalige Klausuraufgabe)

Beweis per Induktion:

Ind.anf.: $n = 0$ $\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}(f\cdot g) = f \cdot g$
$\sum\limits_{k=0}^{0} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0)} = f \cdot g.$ ✓
Ind.vor.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f\cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Ind.schr.: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(f\cdot g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f\cdot g)\right)\\
&\overset{Ind.vor.}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-k+1)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}.
\end{aligned}$$

Es gilt: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{kn!+(n-k+1)n!}{(n-k+1)!k!} = \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)!k!} = \binom{n+1}{k}$.
Außerdem: $k = 0 : \binom{n}{k} = \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$;
$k = n+1 : \binom{n}{k-1} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$.
$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(f\cdot g) = \sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$

Aufgabe 56 (ehemalige Klausuraufgabe)

(a) *Behauptung:* $a_k \leq 2^k \ \forall \ k \in \mathbb{N}$ (Beweis per Induktion).
Ind.anf.: $k = 0$ $a_0 = 1 = 2^0$.
Ind.ann.: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte $a_{\tilde{k}} \leq 2^{\tilde{k}} \ \forall \tilde{k} \leq k$.
Ind.schr.: $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \overset{\text{Ind.ann.}}{\leq} 2^k + 2^{k-1} = 2^{k-1}(2+1) \leq 4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$.
$\Rightarrow \lambda = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \leq 2 \Rightarrow r \geq \frac{1}{2}$.
(Alternativ: $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \Phi$, Φ: goldener Schnitt ≤ 2.
$\Rightarrow \lambda = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq 2 \Rightarrow r \geq \frac{1}{2}$.)

(b)

$$
\begin{aligned}
(1-z-z^2)P(z) =& (1-z-z^2)\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+2} \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} z^k \\
=& a_0 z^0 + a_1 z^1 - a_0 z^1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\underbrace{a_k - a_{k-1} - a_{k-2}}_{=0}) z^k \\
=& 1 + z - z = 1.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow P(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$.