Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

02. Februar 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Zusatzblatt

Lösungsvorschläge folgen zu einem späteren Zeitpunkt.

Aufgabe 49

Zeichnen Sie per Hand die folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cosh x$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh x$

c) $f : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $x \mapsto \arccos x$

d) $f : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto \arcsin x$

Aufgabe 50

Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ sei 2. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j^k z^j, \quad k \in \mathbb{N},$

b) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j z^{kj}, \quad k \in \mathbb{N},$

c) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} j^k a_j z^j, \quad k \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 51

In den folgenden beiden Fällen ist jeweils eine Funktion f gesucht, die um 0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in ?$
Geben Sie jeweils alle möglichen Funktionen f an, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen und ermitteln Sie die Konvergenzradien.

a) Sei eine beliebige Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Hierzu ist f gesucht, so dass

$$f(2x) = 2^{\alpha} f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich von f, für die auch $2x$ im Definitionsbereich ist.

b) Für die Koeffizienten der Potenzreihe gilt die Rekursionsformel

$$-\lambda \cdot a_n = a_{n+1}(n+1), \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}^+$ fest vorgegeben ist.

Aufgabe 52

Beweisen Sie die Quotientenregel.

Aufgabe 53 (ehemalige Klausuraufgabe)

Beantworten Sie die folgenden Fragen kurz ohne Beweis:

a) Sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist. Welche der folgenden Aussagen treffen grundsätzlich auf f zu?

(1) f ist Lipschitzstetig.

(2) f ist gleichmäßig stetig.

(3) f ist differenzierbar.

(4) f ist beschränkt.

(5) $f(K)$ ist kompakt.

(6) f nimmt Maximum und Minimum an.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$

(8) $\exists x \in K\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists y \in K : |x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

b) Betrachtet werden reelle Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Geben Sie an, welche Folgerungen zwischen Stetigkeit, gleichmäßiger Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit gelten. Geben Sie für die Folgerungen, die nicht gelten, Gegenbeispiele an.

Aufgabe 54 (ehemalige Klausuraufgabe)

Sei

$$f(x) := \frac{x^3 - 5x^2}{x^3 - 4x^2 - 5x}$$

Ermitteln Sie alle Nullstellen des Nenners und berechnen Sie an diesen Nullstellen jeweils den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f.

Aufgabe 55 (ehemalige Klausuraufgabe)

Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ n–mal differenzierbar, $D \subset \mathbb{R}$ offen und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für die n–te Ableitung von $f \cdot g$ gilt:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

wobei $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
(Bemerkung: $f^{(0)} = f$. Sofern Sie eine Formel für den Binomialkoeffizienten benutzen, müssen Sie diese beweisen.)

Aufgabe 56 (ehemalige Klausuraufgabe)

Mit Hilfe der Fibonacci–Zahlen

$$a_0 := 1, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

werde eine Potenzreihe gebildet:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist $\geq \frac{1}{2}$.
(Hinweis: Unter anderem die folgenden beiden Wege führen unabhängig voneinander zum Ziel:

  (i) Finden Sie einen geeigneten Wert $b \in \mathbb{R}$, so dass $a_k \leq b^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

  (ii) Untersuchen Sie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ und benutzen Sie ein Ergebnis aus Vorlesung/Übung.)

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}$ gilt:

$$P(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

(Hinweis: Berechnen Sie $(1 - z - z^2)P(z)$).