Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

07. Dezember 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Blatt 8

Abgabe am **Donnerstag, dem 14. Dezember 2017** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 29: (2+2=4 Punkte)

a) Es ist ein weit verbreiteter Irrtum, dass die Existenz des Nikolaus bzw. Weihnachtsmanns damit widerlegt werden kann, dass er nicht alle Menschen an einem Tag besuchen kann. Dieser Trugschluss hat folgende Gründe: Erstens hat er, durch die verschiedenen Zeitzonen, 47 Stunden Zeit, um alle Menschen an einem Kalendertag zu besuchen. Zweitens plant er seinen Besuch wie folgt: Er fängt in der Nähe der Datumsgrenze um 0 Uhr Ortszeit an und arbeitet sich nach Westen vor. Für die erste Person braucht er (inklusive Anreise) 10 Minuten. Da er immer mehr Routine gewinnt, braucht er für jede weitere Person jeweils nur $99,6\%$ der Zeit, die er für die vorherige gebraucht hat. Damit kann er sogar theoretisch abzählbar unendlich viele Menschen innerhalb von 47 Stunden besuchen. Warum?

b) Ein Hase hat erfahren, dass ihn ein Igel bei einem Wettlauf betrogen hat. Er fordert daher eine Revanche. Um einen weiteren Betrug zu verhindern, gibt er folgende Regel vor: Es werden nur 100m gelaufen und der Igel bekommt einen Vorsprung von $d_0 := 1\text{m}$ beim Start, damit der Hase ihn zunächst im Blick hat. Der Lauf beginnt. Der Igel bewegt sich konstant mit $0,1\frac{\text{m}}{\text{s}}$, der Hase mit $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Wenn der Hase die Strecke $\frac{1}{2}d_0$ zurückgelegt hat, so hat sich der Igel bereits ein Stück weiterbewegt, hat also einen Abstand $d_1 > \frac{1}{2}d_0$ vom Hasen. Hat der Hase die <u>weitere</u> halbe Distanz $\frac{1}{2}d_1$ zurückgelegt, ist der Igel erneut ein Stück weiter gekommen: $d_2 > \frac{1}{2}d_1$ ist der Vorsprung. Dies geht (induktiv) immer weiter so: Hat der Hase einen Rückstand d_n zu einem Zeitpunkt und legt danach die Strecke $\frac{1}{2}d_n$ zurück, dann hat der Igel auch ein Stück zurückgelegt und nun den Vorsprung $d_{n+1} > \frac{1}{2}d_n$. Der Hase holt den Igel also nie ein. Andererseits braucht der Hase $t_{\text{Hase}} = \frac{100\text{m}}{5\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 20\text{s}$ für die 100m, der Igel aber $t_{\text{Igel}} = \frac{100\text{m}}{0,1\frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1000\text{s}$. Der Hase hätte demnach den Igel überholen müssen. Wo ist der Fehler?

Aufgabe 30: (2+2=4 Punkte)

(a) Zeigen Sie per Induktion, dass $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

(b) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k!}\right)^{\frac{2}{k}}$?

Aufgabe 31: (3+1=4 Punkte)

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren jeweils die folgenden Reihen? Untersuchen Sie, ob die absolute oder bedingte Konvergenz vorliegt.

(a.1) $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(a.2) $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(a.3) $h(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

(b) Stellen Sie die obige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Exponentialfunktion dar.

Aufgabe 32: (1+1+2=4 Punkte, ehemalige Klausuraufgaben!)

a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent sind.

(i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^5+3n^2}{n^6-n}$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{n}\right)^n$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $b_n := a_n$, $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Zeigen Sie, dass die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren, ihr Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ aber nicht konvergiert. Warum ist das kein Widerspruch?