Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

30. November 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Blatt 7

Abgabe am **Donnerstag, dem 07. Dezember 2017** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 25: (1+1+1+1=4 Punkte)

Sei (a_n) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, so dass die Folge $b_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ nicht beschränkt ist. Was lässt sich über die Beschränktheit der folgenden Folgen (c_n) aussagen?

(a) $c_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+a_k}$,

(b) $c_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+ka_k}$,

(c) $c_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+k^2a_k}$,

(d) $c_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+a_k^2}$.

Aufgabe 26: (4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(a.2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-3n+5}$.

(b) Überprüfen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ auf Konvergenz

(b.1) nach dem Quotientenkriterium,

(b.2) nach dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Beweisen Sie: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ alternierend, d.h. $\operatorname{sgn}(b_n b_{n+1}) = -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $(|b_n|)$ zusätzlich eine monoton fallende Nullfolge, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent.
Hinweis: Schätzen Sie $\sum_{k=n+1}^{m} b_k$ induktiv ab.

Aufgabe 28: (4 Punkte)

Ermitteln Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen/Ungleichungen und skizzieren Sie die entsprechenden Bereiche auf dem Zahlenstrahl bzw. in der Ebene:

(a) $|x+1| - |x-1| = 1$,

(b) $\sqrt{3x-6} - \sqrt{x-3} = 2$,

(c) $(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$,

(d) $|x-1| + |y-1| \leq 1$.