Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

16. November 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Blatt 5

Abgabe am **Donnerstag, dem 23. November 2017** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 17: (4 Punkte)

Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$, wobei $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\beta \neq 0$ gilt.
Zeigen Sie, dass die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ dann konvergent ist und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ gilt.

Aufgabe 18: (1+1+1+1=4 Punkte)

Prüfen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$,

b) $\frac{n!}{n^n}$, $n \geq 1$,

c) $\sqrt[n]{n}$, $n \geq 1$ (Hinweis: Benutzen Sie die AGM-Ungleichung aus Satz 1.4.8.)

d) $\sqrt[n^2]{n!}$, $n \geq 1$.

Aufgabe 19: (2+2=4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x+y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Sei (a_n) eine beliebige Folge. Zeigen Sie:

b.1) Konvergiert (a_n) gegen $\alpha \in \mathbb{R}$, so konvergiert $(|a_n|)$ gegen $|\alpha|$.

b.2) Die Umkehrung gilt nicht.

Aufgabe 20: (1+1+2=4 Punkte)

Prüfen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $\frac{n^2+6n^3+4}{9n^2+3n+5}$,

b) $\frac{q^n}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}, q \in]1, +\infty[$ beliebig aber fest,

c) Zeigen Sie, dass die Folge $a_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$ (F_n: Fibonacci–Zahlen) gegen den Goldenen Schnitt Φ konvergiert.
Hinweis: Stellen Sie eine Rekursionsformel für a_n auf und untersuchen Sie dann $|\Phi - a_n|$.