Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

09. November 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Blatt 4

Abgabe am **Donnerstag, dem 16. November 2017** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 13: (4 Punkte)

Der Binomialkoeffizient "n über k" bzw. "k aus n" wird definiert durch $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}$, wobei $n, k \in \mathbb{N}$; $n \geq k$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Aufgabe 14: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ stets eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ und eine irrationale Zahl $y \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ liegen.

Aufgabe 15: (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle reellen Werte x, für die gilt:

(a.1) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{1+x} = 1$,

(a.2) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x^2-5} = 0$.

(b) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der x-y-Ebene:

(b.1) $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y-2| \leq x \wedge |y-2| < 1\}$,

(b.2) $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

Aufgabe 16: (4 Punkte)

(a) Man teile eine Strecke der Länge 1 in eine Teilstrecke x und den Rest, so dass das Verhältnis aus der Gesamtlänge und der Teilstrecke dem Verhältnis aus der Teilstrecke und dem Rest gleicht. Dieses Verhältnis Φ ist der Goldene Schnitt.
Bestimmen Sie Φ.

(b) Die Fibonacci-Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ sind wie folgt definiert:

$$a_0 := 0;\ a_1 := 1;\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 2.$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$ gilt.