Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

18. Januar 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Blatt 12

Abgabe am **Donnerstag, dem 25. Januar 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 45: (2+0,5+1+0,5=4 Punkte)

a) Die Darstellung der komplexen Zahlen im $\mathbb{R}^2$ wird als "komplexe Ebene" oder "Gauß'sche Zahlenebene" bezeichnet. Zeichnen Sie in dieser Ebene alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, die alle drei Ungleichungen

$$(z-5)(\overline{z}-5) \leq 25, \ |\mathrm{Re}\ z| \geq |\mathrm{Im}\ z|, \ |z-10| \geq 4$$

erfüllen, ein.

b) (a) Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil von $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12769}$.

(b) Skizzieren Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die der Ausdruck $\left(\frac{2+z}{2-z}\right)^4$ reell ist.

(c) Berechnen Sie die Lösungen von $z^2-(3+5i)z = 16-4i$ für $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 46: (2+2=4 Punkte)

(a) Es sei bereits gezeigt, dass die Exponentialfunktion exp stetig in 0 ist. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass exp auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Folge im $\mathbb{R}^3$:

$$x_n = \begin{pmatrix} e^{1/n} \\ \log \sqrt{\left|\frac{n!}{n^n}-1\right|} \\ \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{7}{8}\right)^k\right)^{5/3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 47: (2+1+1=4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie den Zusammenhang zwischen Lipschitzstetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit.

(b) Prüfen Sie, welche der folgenden Funktionen stetig, Lipschitzstetig oder gleichmäßig stetig sind bzw. geben Sie an, wo die Funktionen unstetig sind.

(b.1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ x^2 & , \quad \text{falls } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(b.2) $f :]0,1[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \left|\tfrac{1}{x} - \left[\tfrac{1}{x}\right] - \tfrac{1}{2}\right| \text{ ([ ]: Gaußklammer)}$$

Aufgabe 48: (1+3=4 Punkte, ehemalige Klausuraufgabe)

Seien (E, d_E) und (F, d_F) beliebige metrische Räume. Eine Abbildung $f : E \to F$ heißt stetig in $\xi \in E$, falls für jede Folge (x_n) in E, die gegen ξ bzgl. der Metrik d_E konvergiert, gilt, dass die Folge $(f(x_n))$ in F bzgl. der Metrik d_F gegen $f(\xi)$ konvergiert.

(a) Formulieren Sie das ε–δ–Kriterium in diesem verallgemeinerten Fall, d.h. für metrische Räume.

(b) Beweisen Sie die Äquivalenz des ε–δ–Kriteriums zu obiger Definition der Stetigkeit.

Bonusaufgabe 3: (4 Punkte)

Geben Sie für die folgenden, so genannten rationalen Funktionen, $f : D \to \mathbb{R}$ den maximalen Definitionsbereich, d.h. die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die der Nenner von Null verschieden ist, an. Bestimmen Sie ferner jeweils den rechts- und den linksseitigen Grenzwert an den Nullstellen des Nenners. Polstellen (also Nullstellen des Nenners) heißen

(i) gerade, falls links- und rechtsseitiger Limes beide $+\infty$ oder beide $-\infty$ sind,

(ii) ungerade, falls links- und rechtsseitiger Limes verschieden bestimmt divergieren (d.h. einer $+\infty$ ist und einer $-\infty$),

(iii) hebbar, falls links- und rechtsseitige Konvergenz vorliegt.

$$a) \quad f : x \mapsto \frac{x^3 - 5x^2 + 14x - 24}{x^2 - x - 6} \qquad b) \quad f : x \mapsto \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

<u>Definition</u> Sei $f : D \to W$ eine Funktion und $\xi \in \overline{D} \subset \mathbb{R}$.

a) *rechtsseitiger Limes*
$\lim\limits_{x \to \xi+} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}} :\Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n)_n \subset D$ mit $x_n > \xi \ \forall n$ und $x_n \to \xi$ gilt:

$$f(x_n) \to \eta$$

(sofern solche Folgen existieren)

b) *linksseitiger Limes*
$\lim\limits_{x \to \xi-} f(x) = \eta \in \overline{\mathbb{R}} :\Leftrightarrow \forall$ Folgen $(x_n)_n \subset D$ mit $x_n < \xi \ \forall n$ und $x_n \to \xi$ gilt:

$$f(x_n) \to \eta$$

(sofern solche Folgen existieren).

Präsenzaufgabe (wird in der Übung besprochen)

(a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom ungeraden Grades, d.h. jedes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 x^0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j; a_n \neq 0, n = 2k+1, k \in \mathbb{N};$$

mindestens eine reelle Nullstelle hat.

(b) Alois Winkelhuber ist begeisterter Bergsteiger. Eines Morgens startet er um 9:00 Uhr zu einer Tour auf eine Berghütte, wo er um 20:41 Uhr des selben Tages ankommt. Er übernachtet dort und macht sich am nächsten Morgen um 9:00 Uhr auf, um auf dem gleichen Weg wieder zurück zum Ausgangspunkt seiner Reise zu laufen, den er nach knapp sieben Stunden, um 16:52 Uhr, erreicht.
Gibt es eine Stelle auf der Wegstrecke, an der er bei Auf- und Abstieg jeweils zur gleichen Uhrzeit war?