Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

11. Januar 2018

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Blatt 11

Abgabe am **Donnerstag, dem 18. Januar 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 41: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : x \mapsto \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}$ genau einen Fixpunkt auf dem Intervall $[0, 1]$ besitzt und bestimmen Sie diesen bis auf einen maximalen Fehler von 10^{-5}.

Aufgabe 42: (2+2=4 Punkte)

Sei (E, d) ein beliebiger metrischer Raum und $M \subset E$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) M ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_n \subset M$ mit Limes $x \in E$ gilt, dass $x \in M$.

(b) Ist M kompakt, so ist M beschränkt und abgeschlossen. (Hinweis: Benutzen Sie Teil a).)

Aufgabe 43: (4 Punkte)

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass durch

$$d(x, y) := ||x - y||, \; x, y \in E,$$

eine Metrik auf E erklärt ist.

Aufgabe 44: (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, wobei die euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$ gewählt wird. Zeigen Sie:
M ist genau dann kompakt, wenn M beschränkt und abgeschlossen ist

a) im Fall $n = 1$

b) im Fall $n = 2$.

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 42b).)

Bonusaufgabe 2: (1+1+1+1=4 Punkte)

Der $\mathbb{R}^n$ kann mit folgenden Normen versehen werden:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &:= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \\ \|x\|_\infty &:= \max_{1 \le k \le n} |x_k|, \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n$. Zeichnen Sie per Hand jeweils den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$,

$$S^1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \middle| \, \|x\| = 1 \right\},$$

bezüglich der folgenden Normen:

(a) $\|\cdot\|_1$, (b) $\|\cdot\|_2$, (c) $\|\cdot\|_3$, (d) $\|\cdot\|_\infty$.