Universität Siegen
Department Mathematik
AG Geomathematik
Univ.-Prof. Dr. V. Michel
B. Kretz, M. Sc.

21. Dezember 2017

Übungen zur Vorlesung

Analysis I

Wintersemester 2017/18
Blatt 10

Abgabe am **Donnerstag, dem 11. Januar 2018** zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 37: (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die diskrete Metrik die Eigenschaften einer Metrik erfüllt. Welche Teilmengen des zugehörigen metrischen Raumes sind in diesem Fall offen bzw. abgeschlossen?

Aufgabe 38: (2+2=4 Punkte)

Es sei $\mathbb{R}$ als metrischer Raum mit der euklidischen Metrik gewählt:

(a) Finden Sie ein unendliches System offener Mengen, dessen Durchschnitt nicht offen ist.

(b) Finden Sie ein unendliches System abgeschlossener Mengen, dessen Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 39: (1+3=4 Punkte)

Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt beschränkt, wenn ihr Wertebereich $f(D)$ beschränkt ist. Es sei

$$\mathrm{B}(D) := \{f : D \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$$

mit der Abbildung

$$d(f, g) := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in D\}$$

für alle $f, g \in \mathrm{B}(D)$ versehen.

(a) Zeigen Sie, dass $d(f, g)$ für $f, g \in \mathrm{B}(D)$ stets endlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

Aufgabe 40: (4 Punkte)

Bestimmen Sie das Innere und die abgeschlossene Hülle für die folgenden Mengen $M \subset \mathbb{R}$. Sind die Mengen offen bzw. abgeschlossen?

(a) $M = \mathbb{R}$

(b) $M = \mathbb{Q}$

Bonusaufgabe 1: (2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$ für alle $k \geq k_0$, konvergiert, wenn

(a) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ (Quotientenkriterium) oder

(b) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{a_k} < 1$ (Wurzelkriterium).