Übungen zum Vorkurs Mathematik

vor dem Wintersemester

Dr. Björn O. Lange

Modul L

Blatt 3 — Ausgabe: September — Abgabe:

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation

Berechnen Sie jeweils die Matrix $C = A \cdot B$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

e)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}^T \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2: Matrizen und Determinanten

a) Berechnen Sie $A + B, AB$ und BA mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

b) Berechnen Sie die zugehörigen Determinanten

$$\det A \quad , \quad \det B \quad , \quad \det(A+B) \quad , \quad \det(AB) \quad , \quad \det(BA) .$$

Aufgabe 3: Matrixelemente

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

bzw.

$$\vec{e}_1^T = (1,0,0) \quad , \quad \vec{e}_2^T = (0,1,0) \quad , \quad \vec{e}_3^T = (0,0,1) \; .$$

a) Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$\vec{e}_1^T A \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_1^T A \vec{e}_2 \quad , \quad \vec{e}_1^T A \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_2^T A \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_3^T A \vec{e}_1 \; ,$$

und verallgemeinern Sie auf $\vec{e}_i^T A \vec{e}_j$, mit $i, j \in \{1,2,3\}$.

b) Berechnen Sie die Matrizen

$$\vec{e}_1 \vec{e}_1^T \quad , \quad \vec{e}_2 \vec{e}_2^T \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \vec{e}_i^T = \vec{e}_1 \vec{e}_1^T + \vec{e}_2 \vec{e}_2^T + \vec{e}_3 \vec{e}_3^T$$

c) Was sind

$$\vec{e}_1^T A \quad , \quad \vec{e}_2^T A \quad , \quad \vec{e}_3^T A \; ?$$

Aufgabe 4: Drehmatrizen

Die folgenden drei Matrizen drehen einen 3-dimensionalen Vektor um die x, y, und z Achse:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad , \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad ,$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Suchen Sie sich eine Matrix R_i aus und berechnen Sie

$$R_i^T R_i \quad , \quad R_i R_i^T \; .$$

Fortgeschrittene Aufgaben für Profis und solche, die es werden wollen

Aufgabe 5: Der Kommutator

Wir definieren die folgenden 3 Matrizen:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $T_1 \cdot T_2 - T_2 \cdot T_1$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit T_3.

b) Berechnen Sie $T_2 \cdot T_3 - T_3 \cdot T_2$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit T_1.

c) Berechnen Sie $T_3 \cdot T_1 - T_1 \cdot T_3$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit T_2.

Aufgabe 6: Matrizen und Determinanten

a) Berechnen Sie $A + B, AB$ und BA mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

b) Berechnen Sie die zugehörigen Determinanten

$$\det A \quad , \quad \det B \quad , \quad \det(A+B) \quad , \quad \det(AB) \quad , \quad \det(BA) \, .$$

c) Zeigen Sie für allgemeine 2×2 Matrizen, dass die Vermutungen, die Sie haben, richtig sind. Ansatz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{und ähnlich für } B.$$