

Aufgabe 1:

Man zeige die Aussagen nur unter Benutzung der Körperaxiome (K1)-(K9) aus der Vorlesung.

- a) Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$, so gilt $a + c < b + d$.
- b) Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $0 < a$, so gilt $0 < a^{-1}$.
- c) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a$ und $a < b$, so gilt $b^{-1} < a^{-1}$.
- d) Sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < 0$, so gilt $b \cdot c < a \cdot c$.
- e) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so gilt $a < \frac{a+b}{2} < b$.

Aufgabe 2:

Stellen Sie M in Intervallschreibweise dar, falls es möglich ist.

- a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ und } x \leq 2\}$
- b) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ oder } x \leq 2\}$
- c) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ oder } x \geq 2\}$
- d) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ und } x \leq 2\}$
- e) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$
- f) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\}$
- g) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x^2 < 4\}$
- h) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^3 \leq 8\}$
- i) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ und } \frac{1}{x} > 1\}$
- j) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ und } \frac{1}{x} \leq 1\}$
- k) $M = [1, 3) \cup (2, 4]$
- l) $M = [1, 3) \cap (2, 4]$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit der Definition von Binomialkoeffizienten.

- a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt

$$(n+1) \cdot \binom{n}{k} = (n-k+1) \cdot \binom{n+1}{k}.$$

- b) Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Aufgabe 4:

Für alle $k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$ berechne man $k^3, 2^k, k!$ und $\binom{10}{k}$.

Aufgabe 5:

- a) Berechnen Sie den Zahlenwert der Summen

$$\sum_{j=1}^3 j(j+1) \quad , \quad \sum_{k=1}^{101} 3 \quad , \quad \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

- b) Berechnen Sie den Wert der Produkte

$$\prod_{j=2}^4 \frac{1}{j} \quad , \quad \prod_{k=1}^{11} \frac{k}{k+1} \quad , \quad \prod_{\ell=1}^3 2^\ell$$

Aufgabe 6:

Schreiben Sie die Ausdrücke mit Summenzeichen.

- a) $3^4 + 5^5 + 7^6 + 9^7$
b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+5}$
c) $q - q^2 + q^3 - q^4 + \dots - q^{12}$

Aufgabe 7:

Schreiben Sie die Ausdrücke mit Produktzeichen.

- a) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
b) $4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13$
c) $4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49$