Übungen zum Vorkurs Mathematik

vor dem Wintersemester

Dr. Björn O. Lange **Modul G**

Blatt 4 — Ausgabe: September — Abgabe:

Aufgabe 1: Die Komplexe Ebene

Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Ebene ein. Bestimmen Sie dann die komplex-konjugierte Zahl und tragen Sie diese ebenfalls ein. Berechnen Sie den Absolutbetrag der Zahl, bzw ihrer komplex-konjugierten Zahl.

a) $$1 + i$$

b) $$1 - i\sqrt{3}$$

c) $$2i - 2$$

d) $$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

e) $$4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

f) $$r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right) \quad , \quad r = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad \phi \in [0, \pi]$$

Aufgabe 2: Komplexe Algebra

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie das Ergebnis als Real- und Imaginärteil an.

a) $$(1 + i)^2$$

b) $$(i + \sqrt{3})^2$$

c) $$\frac{2 + i}{3 - i}$$

d) $$\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2$$

Aufgabe 3: Komplexwertige Funktionen

a) Sei $f(z) = z^2 - 2z + 1$. Was ist $f(1-i)$?

b) Sei $f(z) = z^2 - 2z + 1$. Was ist $f(i-2)$?

c) Sei $f(z) = z^2 + 3z + 3$. Was sind die Nullstellen von f in der komplexen Ebene?

Aufgabe 4:

Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Polardarstellung an.

$$\text{(a)}\ -5 \quad , \quad \text{(b)}\ -5i \quad , \quad \text{(c)}\ 1+\sqrt{3}i \quad , \quad \text{(d)}\ \sqrt{3}+i \quad , \quad \text{(e)}\ -3+3i$$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\exp(i\varphi)$ mit

$$\text{(a)}\ \varphi = \frac{2}{3}\pi \quad , \quad \text{(b)}\ \varphi = \frac{2}{3}\pi \quad , \quad \text{(c)}\ \varphi = \frac{3}{4}\pi \quad , \quad \text{(d)}\ \varphi = \frac{7}{6}\pi \quad , \quad \text{(e)}\ \varphi = 5\pi$$

Aufgabe 6:

Benutzen Sie die Polarform $z = re^{i\phi}$ um folgende Aufgaben in Real- und Imaginärteil darzustellen.

a) $$e^{-i\pi/4}$$

b) $$(1-i)^8$$

c) $$\left(\frac{\sqrt{2}}{i-1}\right)^{10}$$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie jeweils eine nicht-reelle Lösung der Gleichung für $z \in \mathbb{C}$.

$$\text{(a)}\ z^2 = i \quad , \quad \text{(b)}\ z^3 = -1 \quad , \quad \text{(c)}\ z^4 = 16 \quad , \quad \text{(d)}\ z^6 = 1$$

Aufgabe 8:

Geben Sie je eine Formel für den Real- und Imaginärteil von $(1-i)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ an, in der ausschließlich reelle Zahlen auftreten. Wie beweisen Sie diese?

Aufgabe 9: Etwas Knobeliges.

Sei $w \in \mathbb{C}$. Man zeige:

Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = \frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re} w)$ und $y^2 = \frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re} w)$ sowie $x, y \geq 0$, so wird die Gleichung $z^2 = w$ im Fall $\operatorname{Im} w \geq 0$ von $z = x + iy$ und andernfalls von $z = x - iy$ gelöst.