

Aufgabe 1: Wurzelausdrücke

Vereinfachen Sie

- a) $\sqrt{7}\sqrt{28}$
- b) $(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})$
- c) $\sqrt[3]{2a^2}\sqrt[3]{32a}$
- d) $x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$
- e) $(\sqrt[3]{a+b})^2 \sqrt[3]{a^2 - b^2}$

Aufgabe 2: Rechnen mit Potenzen

Vereinfachen Sie

- a) $a^2 \left(\frac{a}{x}\right)^{-2}$
- b) $\frac{x^{-n}}{x^{n-2}}$
- c) $(-a^3)^{-3}$
- d) $a^4 \sqrt{\frac{x}{a^2}}$
- e) $\frac{(1+a^2)^{3/2}}{a}$ für $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 3: Höhere Binomiale

Berechnen Sie mithilfe des Pascal'schen Dreiecks

- a) 11^3 und 11^4 wie in Aufgabe 3 des letzten Blatts,
- b) $(a+5)^4 - (a-5)^4$.

Aufgabe 4: Binomialkoeffizienten

Die "Fakultät" einer natürlichen Zahl ist definiert als $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ und $0! = 1$, also z.B. $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, etc.

Die Binomialkoeffizienten mit natürlichen Zahlen sind definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

- a) Zeigen Sie $n! = n \cdot (n-1)!$ und warum deshalb $0! = 1$ Sinn macht.
- b) Verifizieren Sie für die ersten paar Zeilen des Pascal'schen Dreiecks, daß die Einträge $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n}$ sind.
- c) Zeigen Sie allgemein, daß $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ist.
- d) Beweisen Sie, daß für alle n gilt: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Ähnliche Aufgaben einer Kommission für Schulmathematik

Aufgabe 5: Verständnisfragen

a) Ordnen Sie (ohne Taschenrechner) die Zahlen der Größe nach.

$$0; (0.5)^{-2.4}; 1; 4; 4^{-3.8}; 0.25; 2^{-3.3}; (0.5)^{2.4}; 8; 2^{-3}$$

b) Welche der Umformungen für $a, b > 0$ sind richtig, welche falsch? Beispiel, Gegenbeispiel?

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + b, \quad \sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b$$

c) Begründen Sie, daß $(99/41)^2$ zwischen 4 und 9 liegt. Zwischen welchen aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen liegt $\sqrt{150}$?

d) Für welche Werte von a und b gibt es keine / eine / zwei reelle Lösungen für x ?

$$(x + 2)^2 = a, \quad x^2 + bx + 4 = 0$$

Aufgabe 6: Vereinfachen Sie mit Potenzrechnung

a)

$$x^2 x^4 + \frac{x^8}{x^2} + (x^2)^3 + x^0$$

b)

$$\frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$$

c)

$$3^{18} : 3^{16}$$

d)

$$2^6 \cdot (1/2)^5$$

e)

$$\sqrt[4]{81}$$

f)

$$2^{3^2}$$

g)

$$(\sqrt[3]{5})^{3n}$$

Aufgabe 7: Quadratische Ergänzung ("p, q-Formel")

Lösen Sie – soweit wie Ihnen möglich – nach x auf.

a)

$$\sqrt{8 - 2x} = 1 + \sqrt{5 - x}$$

b)

$$2e^{2x} - 5e^x = 0$$

c)

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

d)

$$3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$$

e)

$$\frac{x}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x^2-9}$$