Übungen zum Vorkurs Mathematik

vor dem Wintersemester

Dr. Björn O. Lange

Modul A

Blatt 7 — Ausgabe: September — Abgabe:

Aufgabe 1: Integration

Geben Sie eine Stammfunktion der folgenden Integranden an:

a) $f(x) = 3x^2 + x - 1$,

b) $f(x) = A \cos(kx + \alpha)$,

c) $f(x) = 1/x^3$,

d) $f(x) = x \exp(-x^2)$. *Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Problem* $f(x) = \exp(g(x))g'(x)$, *dann erkennen Sie bestimmt, wie's geht.*

Aufgabe 2: Stammfunktion von f'/f

Wir suchen eine Stammfunktion $F(x)$ zum Integranden $f'(x)/f(x)$, d.h.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} .$$

Sie mögen geraten haben, daß $F(x)$ vielleicht $\ln(f(x))$ seien könnte. Doch was, wenn die Funktionswerte $f(x)$ zufällig *negativ* sind?

a) Nehmen Sie an, $f(x) > 0$ sein positiv definit. Zeigen Sie, daß $\ln(f(x))$ tatsächlich eine Stammfunktion ist.

b) Wieder $f(x) > 0$. Zeigen Sie, daß $\ln(cf(x))$ mit $c > 0$ wieder eine Stammfunktion ist.

c) Nehmen Sie an, $f(x) < 0$ in dem betrachteten Bereich. Zeigen Sie, daß eine korrekte Stammfunktion nun $\ln(-f(x))$ ist.

d) Argumentieren Sie nun dafür, daß

$$F(x) = \ln(|cf(x)|) \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

alle Eventualitäten abdeckt.

bitte wenden

Aufgabe 3: Partielle Integration

Berechnen Sie durch partielle Integration die folgenden Integrale, und bestimmen Sie eine Stammfunktion. Testen Sie jeweils, ob die Stammfunktion die richtige Ableitung besitzt.

a) Setzen Sie $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln(x)$:

$$\int_a^b \ln(x)\,dx = \int_a^b 1 \cdot \ln(x)\,dx \;.$$

b) Welche der zwei folgenden Strategien führt zum Erfolg?

$$\int_a^b \underbrace{x}_{f'}\underbrace{e^{kx}}_{g}\,dx \quad \text{oder} \quad \int_a^b \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^{kx}}_{f'}\,dx$$

c) Für Begeisterte oder solche, die es werden wollen: Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_0^\pi \cos(x)\cos(2x)\,dx$$

indem Sie es *zweimal in der selben Richtung* partiell Integrieren. Sie erhalten eine Gleichung, die nur richtig sein kann, wenn $I = 0$ ist, z.B. $I = 4I$.

Aufgabe 4: Substitution

Berechnen Sie

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\,dx \;,$$

indem Sie $y = x^2$ substituieren.