Übungen zum Vorkurs Mathematik

WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange

Modul S

Blatt 2 — Ausgabe: Fr., 22.09.2023 — Abgabe:

Aufgabe 1: Zum warm werden

Zeigen Sie, daß

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{ist.}$$

Aufgabe 2: Kontinuierliche Verteilung

Sei $p(x)$ die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Konstanten B und k, und ihre Momente M_n,

$$p(x) = Be^{-kx} \quad , \quad M_n = \int_0^\infty x^n p(x)\, dx \; .$$

a) Berechnen Sie M_0 und bestimmen Sie B aus der Forderung $M_0 = 1$.

b) Berechnen Sie dann M_1, M_2, und die Varianz $\sigma^2 = M_2 - M_1^2$.

Aufgabe 3: Binomialverteilung

Hier brauchen Sie einen Taschenrechner. Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Stichprobe von $n = 40$ Stück aus einer Produktionsserie von $N = 10000$ Stück und einem Ausschußprozentsatz von 10%.
Wegen der Größe der Produktionsserie können Sie von einer Binomialverteilung ausgehen, $w_n(k)$ wie in der Vorlesung, mit $p = 10\%$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter den 40 ausgewählten Stücken genau 10 Ausschussstücke zu finden?

b) Welche Wahrscheinlichkeit ergibt sich für höchstens 5 Ausschussstücke in der Stichprobe?

c) Wie groß ist der Erwartungswert und die Streuung dieser Verteilung?

Aufgabe 4: Rechentrick

Eine Normalverteilung um $\bar{x} = 0$ ist gegeben durch

$$p(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1 \ ,$$

wobei der Ausdruck für A in dieser Aufgabe nicht wichtig ist. Er wurde durch die obige Normierung bestimmt.
Benutzen Sie partielle Integration um zu zeigen, daß der Parameter σ gegeben ist durch

$$\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, p(x)\, dx \ .$$

Hinweis: Multiplizieren Sie den Integranden mit 1.

Aufgabe 5: Normalverteilung

In einem Betrieb werden Spezialschrauben hergestellt. Die Länge der Schrauben ist eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\bar{x} = 225.7$ mm und einem Streuungsmaß von $\sigma = 1.5$ mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Länge einer zufällig ausgewählten Schraube

a) weniger als 2.5 mm vom Erwartungswert abweicht,

b) zwischen 224.0 mm und 227.0 mm liegt,

c) größer als 226.0 mm ist,

d) mehr als 2.5 mm vom Erwartungswert abweicht,

e) kleiner als 225.4 mm ist?

Hinweis: Eine Stammfunktion der Gaußschen Glockenkurve kann durch die "Error-Function" berechnet werden,

$$\mathrm{Erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{y} e^{-z^2} dz \ .$$

Die relevanten Funktionswerte sind

y	$\mathrm{Erf}(y)$
0.1414	0.1586
0.6128	0.6139
0.8014	0.7429
1.1785	0.9044
∞	1