Übungen zum Vorkurs Mathematik

WiSe 2023/24

Dr. Björn O. Lange

Modul L

Blatt 5 — Ausgabe: Mi., 20.09.2023 — Abgabe:

Aufgabe 1: Lineare Abhängigkeit

a) Man prüfe, ob die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in einer Ebene liegen. Falls dies der Fall ist, sind die drei Vektoren linear abhängig.

b) Für welche Werte von α sind die Spalten der folgenden Matrizen linear unabhängig?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Nochmal lineare Abhängigkeit

Welche Kombinationen von drei aus den vier folgenden Vektoren ist linear unabhängig?

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 3:

Prüfen Sie, ob das folgende lineare Gleichungssystem lösbar ist:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 1 \\ 2x + 4y + 4z &= 2 \\ 3x + 5y + 6z &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Winkel im Raum

Zwei Geraden sind parameterisiert durch

$$g_1 : \vec{a} + \lambda \vec{v} \quad , \quad g_2 : \vec{a} + \mu \vec{w} \; .$$

mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -17 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \; .$$

Offensichtlich schneiden sich die beiden Geraden im Punkt $\vec{a}$. Welcher Winkel ist zwischen g_1 und g_2?

Aufgabe 5: Abstand zu einer Geraden

Gegeben sind drei Punkte A, B, C in der $x - y$ Ebene. Vom Ursprung aus werden sie erreicht durch die Vektoren

$$\vec{p_A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p_B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{p_C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

a) Bilden Sie eine Gerade, die durch die Punkte A und B geht: Sie parameterisieren $y(x) = ax + b$ und bilden ein Gleichungssystem mit den Punkten A und B. Lösen Sie nach a und b.

b) Bilden Sie nun den Lotvektor

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} - \vec{p_C} \; .$$

Dieser soll senkrecht auf dem Tangentenvector $\vec{t} = \vec{p_A} - \vec{p_B}$ sein, d.h. $\vec{t} \cdot \vec{\ell} = 0$. Lösen Sie diese Gleichung nach x auf.

c) Berechnen Sie letztendlich die Länge von $\vec{\ell}$, d.h. den kürzesten Abstand vom Punkt C zur Gerade, die durch A und B geht.

Aufgabe 6: Skalar- und Kreuzprodukt

Sei $\vec{a}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Wir orientieren das Koordinatensystem so, daß die z Achse senkrecht auf $\vec{a}$ liegt, d.h. $\vec{e}_z \cdot \vec{a} = 0$, oder $\vec{a} = (a_1, a_2, 0)^T$. Der Vektor $\vec{b} = R\vec{a}$ wird nun durch Rotation von $\vec{a}$ mit der Matrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugt, d.h. durch Drehung um ϕ um die z Achse.

a) Zeigen Sie explizit, daß

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T R\vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos\phi = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi \ .$$

b) Zeigen Sie explizit, daß

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_z \, |\vec{a}||\vec{b}| \sin\phi \ .$$

Aufgabe 7: komplexe "Zahlen" mit Drehmatrizen

Betrachten Sie die Drehmatrix $R(\phi)$:

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Klarerweise ist $R(0) = \mathbb{1}$, und wir definieren $\mathcal{I} = R(\frac{\pi}{2})$.
Nun betrachten Sie Matrizen der Form

$$Z = x\mathbb{1} + y\mathcal{I} \ ,$$

wobei x und y reelle Zahlen sind.

a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{I}^2 = -\mathbb{1}$ ist. Was ist $\mathcal{I}^3$? Was $\mathcal{I}^4$?

b) Wenn man zwei solcher Matrizen – sagen wir Z und Z' – multipliziert, ergibt sich wieder eine Matrix dieser Form. Wie sehen die Koeffizienten von $\mathbb{1}$ und $\mathcal{I}$ aus?

c) Berechnen Sie $\sqrt{\det Z}$.

d) Wir definieren die *konjugierte* Matrix Z^* als diejenige, die sich aus Z ergibt, wenn der Koeffizient von $\mathcal{I}$ sein Vorzeichen wechselt. Zeigen Sie, daß $Z^* = Z^T$ ist.

e) Zeigen Sie, daß $Z \cdot Z^* = (x^2 + y^2)\mathbb{1}$ ist. Argumentieren Sie nun, daß $\frac{1}{(x^2+y^2)} Z^*$ die inverse Matrix von Z ist.

f) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ mit $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$ substituieren. Zeigen Sie, daß $Z = rR(\varphi)$ ist, wobei $r = \sqrt{\det Z} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, siehe Teil c).

g) Sei nun $Z = rR(\varphi)$ und $Z' = r'R(\varphi')$. Zeigen Sie, daß $Z \cdot Z' = rr'R(\varphi + \varphi')$ ist.